東京大学・文科

試験日　年 月 日　時間 分　(出題範囲)

1 a を正の実数とする．座標平面上の曲線 C を $y=ax^3-2x$ で定める．原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ．

2 N を 5 以上の整数とする．1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ．ただし 1 は必ず選ぶこととする．選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える．

条件 1：S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない．

条件 2：S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む．

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l, l+1, \cdots, l+k-1\}$ と表される集合を指す．例えば $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1, 2, 3\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{8, 9, 10\}$ を含む．

(1) 条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか．

(2) 条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか．

3 理科第一問と共通

4 理科第四問と共通

1

数学Ⅱ【微分と方程式】標 準

▶解答◀ $y=ax^3-2x$ と $x^2+y^2=1$ を連立し

$$x^2+(ax^3-2x)^2=1$$

$$a^2x^6-4ax^4+(5x^2-1)=0$$

$x=0$ を代入すると成立しないから，解は $x \neq 0$ である．$x^2=X$ とおく．

$$a^2X^3-4aX^2+(5X-1)=0$$

$$f(X)=a^2X^3-4aX^2+(5X-1)$$

とおく．

$$f'(X)=3a^2X^2-8aX+5$$

$$=(aX-1)(3aX-5)$$

$a>0$ より $f(X)$ の増減は次のようになる．

X	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(X)$		↗		↘		↗

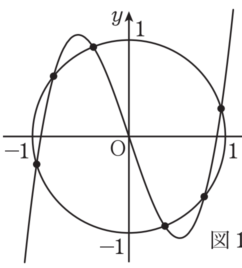

図 1

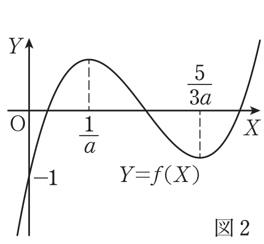

図 2

$f(X)=0$ が $X>0$ の範囲で異なる 3 つの実数解をもつ条件を考える．

$$f(0)=-1<0$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-\frac{4}{a}+\frac{5}{a}-1=\frac{2-a}{a}$$

$$f\left(\frac{5}{3a}\right)=\frac{125}{27a}-\frac{100}{9a}+\frac{25}{3a}-1=\frac{50-27a}{27a}$$

$f(X)=0$ が $X>0$ に異なる 3 つの実数解をもつ条件は

$$f\left(\frac{1}{a}\right)>0 \text{ かつ } f\left(\frac{5}{3a}\right)<0$$

である．求める a の範囲は $\boldsymbol{\frac{50}{27}<a<2}$ である．

2

数学A【場合の数】やや難

考え方 今年流行のソーシャルディスタンスの問題である．空席の個数を数えると，恐ろしいほどの頻出基本問題になる．

▶解答◀ (1) 1 を選び，連続しない整数を N 個選ぶ．その一例は，N 個の奇数

1　3　5　$\cdots$　$(2N-3)$　$(2N-1)$

を選ぶときである．これは椅子を $2N$ 個並べておいて，そのうちの N 個に，どの人も間を 1 個以上空けて着席する場合，1 番左端に着席し，間を 1 個を空けて，3 番目の椅子に着席し，間を 1 個空けて，5 番目に着席し，$\cdots$，間を 1 個空けて，$2N-1$ 番目に着席し，最後に，右端を空けた場合である．着席というのは人が座ることとする．ただし，人の違いは無視する．右端の空いている椅子を持ち上げて，人と人の間 $(N-1$ カ所ある$)$ に

突っ込んでもよい．どこに突っ込むかで，$N-1$ 通りあるから，空席と着席の列は全部で $1+(N-1)=\boldsymbol{N}$ 通りある．

（**2**）　連続する $N-2$ 個の整数を R とし，後 2 個選ぶ数を，左から A，B とする．R と A，B の位置関係は次の 3 タイプがある．R の左には，どれだけ多くても，数は 2 個しかない．R で $N-2$ 個の数を取るから，残りは 2 個だからである．（1）と同様に空席と着席で説明する．

（ア）　R が左端から始まるとき．

$$R \overset{x}{\Downarrow} A \overset{y}{\Downarrow} B \overset{z}{\Downarrow}$$

x は R と A の間の空席の個数を表し，他も同様とする．

$$x+y+z=N,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

である．たとえば $N=5$ のとき，$x=2,\ y=2,\ z=1$ の場合には，

$$\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ 4,\ 5,\ \mathbf{6},\ 7,\ 8,\ \mathbf{9},\ 10$$

で，太字は選択する数，細字は選択しない数を表し，$x=2$ は選択しない個数が 2 であることを表す．この結果，選ぶ集合は $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\}$ である．

$$(x+1)+(y+1)+(z+1)=N+3,$$

$$x+1 \geqq 1,\ y+1 \geqq 1,\ z+1 \geqq 1$$

となり，自然数解 $(x+1,\ y+1,\ z+1)$ の個数は ${}_{N+2}\mathrm{C}_2$ である．

（イ）　R が左端から始まらず，R の左に 1 個の着席があるとき．この場合，R の直前は空席である．

$$A \overset{x}{\Downarrow} R \overset{y}{\Downarrow} B \overset{z}{\Downarrow}$$

$$x+y+z=N,\ x \geqq 1,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$$x+(y+1)+(z+1)=N+2,$$

$$x \geqq 1,\ y+1 \geqq 1,\ z+1 \geqq 1$$

自然数解 $(x,\ y+1,\ z+1)$ の個数は ${}_{N+1}\mathrm{C}_2$ である．

（ウ）　R が左端から始まらず，R の左に 2 個の着席があるとき．この場合も R の直前は空席である．

$$A \overset{x}{\Downarrow} B \overset{y}{\Downarrow} R \overset{z}{\Downarrow} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$x+y+z=N,\ x \geqq 0,\ y \geqq 1,\ z \geqq 0$$

自然数解 $(x+1,\ y,\ z+1)$ の個数は ${}_{N+1}\mathrm{C}_2$ である．

$(x,\ y,\ z)$ の個数は全部で

$${}_{N+2}\mathrm{C}_2 + {}_{N+1}\mathrm{C}_2 + {}_{N+21}\mathrm{C}_2$$

$$=\frac{1}{2}(N+2)(N+1)+(N+1)N$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)}$$

注意　**1°【個数の数え方】**

$x+y+z=N,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ のとき，

$$(x+1)+(y+1)+(z+1)=N+3$$

$$x+1 \geqq 1,\ y+1 \geqq 1,\ z+1 \geqq 1$$

○を $N+3$ 個並べ，その間（$N+2$ カ所ある）から 2 カ所を選んで仕切りを 1 本ずつ突っ込む．1 本目の仕切りから左の○の個数を $x+1$，2 本の仕切りの○の個数を $y+1$，2 本目の仕切りから右の○の個数を $z+1$ とする．自然数解 $(x+1,\ y+1,\ z+1)$ の個数は ${}_{N+2}\mathrm{C}_2$ である．たとえば○○｜○○○○｜○のとき $x+1=2,\ y+1=4,\ z+1=1$ を表す．

$x \geqq 1,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ のときは

$$x+(y+1)+(z+1)=N+2$$

で，$(x,\ y+1,\ z+1)$ は ${}_{N+1}\mathrm{C}_2$ 通りある．

2°【漏れなく重複なく】

$$R \overset{x}{\Downarrow} A \overset{y}{\Downarrow} B \overset{z}{\Downarrow} \quad x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$$A \overset{x}{\Downarrow} R \overset{y}{\Downarrow} B \overset{z}{\Downarrow} \quad x \geqq 1,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$$A \overset{x}{\Downarrow} B \overset{y}{\Downarrow} R \overset{z}{\Downarrow} \quad x \geqq 0,\ y \geqq 1,\ z \geqq 0$$

という 3 つの分類で，R が左端から始まる，R より左に 1 つの着席がある（R の直前は空席），R より左に 2 つの着席がある（R の直前は空席）であり，R よりも左に 3 つ以上の着席はなく，重なりがなくすべてを尽くしている．この意識を持とう．

♦別解♦　（**1**）　選ぶ数を小さい方から

$$1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{N-1}$$

とする．

$$3 \leqq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{N-1} \leqq 2N$$

である．隣り合う数は 2 以上離れているから

$$3 \leqq x_1 < x_2-1 < x_3-2$$

$$< \cdots < x_{N-1}-(N-2) \leqq N+2$$

$$1 \quad 3 \quad \overbrace{x_1 \qquad\quad x_2}^{2\text{以上離れている}} \qquad x_3$$

$$\swarrow 1\text{ずらす} \qquad \swarrow 2\text{ずらす}$$

$$1 \quad 3 \quad \overbrace{x_1 \quad x_2-1}^{1\text{以上}} \qquad x_3-2$$

$3 \sim N+2$ の N 個の中から $N-1$ 個の異なる整数を選ぶ組合せを考え ${}_N\mathrm{C}_{N-1}=\boldsymbol{N}$ 通りある．

（**2**）　「連続する $N-2$ 個の整数」を R で表し，$N-2$ 個の整数が連続していることを $N-2$ 連続と呼ぶことにする．

（ア） 1 から $N-2$ 連続が始まるとき．

左端が 1 の R	$(N-1)$〜$2N$ から 2 個

$(N-1)$〜$2N$ の $N+2$ 個から 2 個選ぶ組合せを考え，

${}_{N+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}(N+2)(N+1)$ 通りある．

（イ） 1 から $N-2$ 連続が始まらないとき．

1 $\boxed{\text{席が } N+2 \text{ 個内に} \boxed{R}\boxed{1\text{ 個}}}$

まず，空席を $N+2$ 個並べておいて，その 1 席に R を入れ，他の 1 席に 1 以外に選ぶ 1 個を入れると考える．R と 1 個を入れる順列は $(N+2)(N+1)$ 通りある．この位置を決めれば数自体が定まる．ただし，この中には，二重に数えられているものがある．

（イ-1） 1 個と R が隣り合い $N-1$ 連続になるもの．

$\boxed{\text{席が } N+2 \text{ 個内に} \boxed{N-1\text{ 連続}}}$

この $N-1$ 連続部分が

1 個	$N-2$ 連続

$N-2$ 連続	1 個

の 2 タイプあるからである．$N-1$ 連続の固まりと空席 N 個の順列が $N+1$ 通りある．これを引くだけでは駄目で，この中でも，1 を含めた順列で，1 が連続に組込まれたもの，$1, 2, \cdots, N$ の連続になってしまうものが 1 通りある（今は 1 が連続に組込まれないものを数えている）．

1 $\boxed{N-1\text{ 連続}}$

（イ-2） 1 個と R がつながらないが，R が 1 と連続してしまう（1 から $N-1$ 個の連続になっている）もの．その連続の右に空席を 1 個置き，1 個と $N-1$ 個の空席の順列を考え，N 通りの順列がある．

左端が 1 の $N-1$ 連続	1 個空席	席が N 個内に 1 個

これが不適である．

以上より，求める数は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(N+2)(N+1)\\
&\qquad +(N+2)(N+1)-(N+2+N)\\
&=\frac{3}{2}(N+2)(N+1)-2(N+1)\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)}
\end{aligned}
$$

ある飲食店には横一列に並んだカウンター席が 10 席あるが，客は互いに 2 席以上空けて座らなければならない．

（1） 同時に座ることのできる最大の客数を求めなさい．

（2） 客が 2 名のとき，席の空き方は何通りあるか．

（3） 客が 1 名以上のとき，席の空き方は全部で何通りあるか．

（21　龍谷大・推薦）

解答は書略する．

要の分析　昨年に続いて，文理共通の整数が難しい．全体を通して昨年並みの難易度であるが，**3**，**4** の 2 題が文理共通となっている．今年も **2** に場合の数が出題された．

（）