# 東京大学・理科

試験日　年 月 日　時間 分 （出題範囲）

**1** $a, b$ を実数とする．座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の $x$ 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の $x$ 座標は $0 < x < 1$ を満たす．

（1） 点 $(a, b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

（2） 放物線 $C$ の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ．

**2** 複素数 $a, b, c$ に対して整式 $f(z) = az^2 + bz + c$ を考える．$i$ を虚数単位とする．

（1） $\alpha, \beta, \gamma$ を複素数とする．$f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta,\ f(i) = \gamma$ が成り立つとき，$a, b, c$ をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma$ で表せ．

（2） $f(0),\ f(1),\ f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

**3** 関数

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

に対して，$y = f(x)$ のグラフを $C$ とする．点 $\mathrm{A}(1, f(1))$ における $C$ の接線を

$$l : y = g(x)$$

とする．

（1） $C$ と $l$ の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の $x$ 座標を求めよ．

（2）（1）で求めた共有点の $x$ 座標を $\alpha$ とする．定積分

$$\int_{\alpha}^{1} \{f(x) - g(x)\}^2 \, dx$$

を計算せよ．

**4** 以下の問いに答えよ．

（1） 正の奇数 $K, L$ と正の整数 $A, B$ が $KA = LB$ を満たしているとする．$K$ を 4 で割った余りが $L$ を 4 で割った余りと等しいならば，$A$ を 4 で割った余りは $B$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

（2） 正の整数 $a, b$ が $a > b$ を満たしているとする．このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1},\ B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 $K, L$ が存在することを示せ．

（3） $a, b$ は（2）の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする．${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

（4） ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ．

**5** $\alpha$ を正の実数とする．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における $\theta$ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha, -3)$, $\mathrm{P}(\theta + \sin\theta, \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める．

（1） $0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる $\theta$ がただ 1 つ存在することを示せ．

（2） 以下が成り立つような $\alpha$ の範囲を求めよ．

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における $\theta$ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる．

**6** 定数 $b, c, p, q, r$ に対し，

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が $x$ についての恒等式であるとする．

（1） $p \neq 0$ であるとき，$q, r$ を $p, b$ で表せ．

（2） $p \neq 0$ とする．$b, c$ が定数 $a$ を用いて

$$b=(a^2+1)(a+2),\ c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

と表されているとき，有理数を係数とする $t$ についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$$

を満たすものを1組求めよ．

（3） $a$ を整数とする．$x$ の4次式

$$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

が有理数を係数とする2次式の積に因数分解できるような $a$ をすべて求めよ．

**1**　数学Ⅱ【不等式と領域】標準

**▶解答◀**　（1） $y=x^2+ax+b$ と $y=-x^2$ を連立すると

$$x^2+ax+b=-x^2$$

$$2x^2+ax+b=0$$

$f(x)=2x^2+ax+b$ とおくと，$f(x)=0$ が $-1<x<0$ と $0<x<1$ に1つずつ解をもつ条件は

$$f(-1)>0 \text{ かつ } f(0)<0 \text{ かつ } f(1)>0$$

である．ゆえに

$$f(-1)=2-a+b>0$$

$$f(0)=b<0,\ f(1)=2+a+b>0$$

これらを $ab$ 平面に図示すると，図2の境界を含まない網目部分となる．

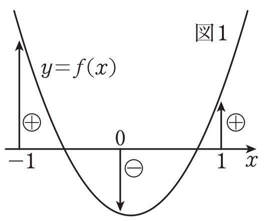


図1

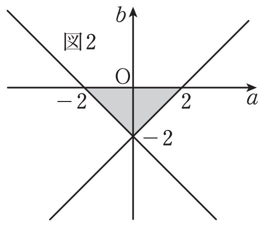


図2

（2） $x, y$ を固定する．$F(a, b)=b+xa+x^2-y$ とおく．$F(a, b)=0$ かつ図2の網目部分を満たす $(a, b)$ が存在する条件を求める．それは $ab$ 平面の直線 $F(a, b)=0$ が図2の領域の内部を通過することであり，そのような $(a, b)$ が存在しないのは，図2の三角形の3頂点の上方（境界を含む）を通るか，下方（境界を含む）を通るときである．すなわち，3頂点のすべてが $F(a, b)$ の正領域（境界を含む）にあるか，負領域（境界を含む）にある．

$$F(2, 0) \geqq 0,\ F(-2, 0) \geqq 0,\ F(0, -2) \geqq 0$$

または

$$F(2, 0) \leqq 0,\ F(-2, 0) \leqq 0,\ F(0, -2) \leqq 0$$

である．よって

$$y \leqq x^2+2x,\ y \leqq x^2-2x,\ y \leqq x^2-2$$

または

$$y \geqq x^2+2x,\ y \geqq x^2-2x,\ y \geqq x^2-2$$

これを図示すると図3の3曲線すべての下方（境界を含む），または上方（境界を含む）となる．これ以外の部分が答えで，図3の境界を除く網目部分となる．

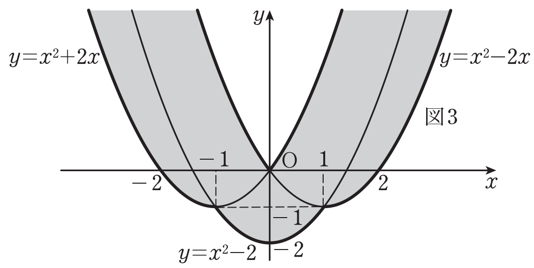
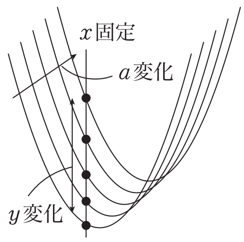


図3

**♦別解♦**　（2） 解説を含めて書く．




$x$ を固定して，$a, b$ を動かしたとき，$y=x^2+ax+b$ のとる値の値域を求めるという方法がある．実は，本問では，その解法は結構苦労する．理由は，$(a, b)$ の変域が，周を除く三角形の内部ということが原因である．

まず，$a$ を固定しよう．図2の三角形の下側の折れ線は

$a \geqq 0$ のときは $b=a-2$

$a \leqq 0$ のときは $b=-a-2$

となる．これを $b=-2+|a|$ とまとめよう．すると，$-2<a<2$ かつ $-2+|a|<b<0$ とまとめることができる．ひとまず，これを用いて $b$ を動かしたときの $y=x^2+ax+b$ の値域を求めると

$$x^2+ax+|a|-2<y<x^2+ax \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

これから $a$ を動かして値域を求めるが，$x=0$ のとき，

$x^2+ax$ は一定になるのに対して，$x \neq 0$ のときいろいろな値を取る．そこで場合分けする．

（ア）　$x=0$ のとき．$y=b$ である．$b$ は $-2<b<0$ のすべてを動くから $y$ の値域は $-2<y<0$ である．

（イ）　$x \neq 0$ のとき．$a$ を動かしたとき，① の右辺は変化するが，変域は $-2<a<2$ の範囲で，端に等号がついていない．「$y$ の最大値が○」という書き方ができず，鬱陶しい．$y$ が $m<y<M$ の値をとり，いくらでも $m, M$ に近い値を取ることができるとき，$y$ の上限が $M$，下限が $m$ という．

$x^2+ax$ の上限は，
$a=2, -2$ のときの値の大きい方（等しいときはその値）である．$M$ は $x^2+2x, x^2-2x$ の大きい方（等しいときはその値）である．

$h(a)=x^2+ax+|a|-2$ の下限を考察する．
$0 \leqq a<2$ のとき．

$$h(a)=x^2+ax+a-2=x^2+a(x+1)-2 \quad \cdots\cdots②$$

$-2<a \leqq 0$ のとき．

$$h(a)=x^2+ax-a-2=x^2+a(x-1)-2 \quad \cdots\cdots③$$

条件は左右対称であるから $0 \leqq x$ で考察する．$x=1$ のとき ③ の $h(a)=-1$
② の $h(a)=2a-1 \geqq -1$
$h(a)$ の最小値は $-1$ である．これ以外の $x$ では

$$h(0)=x^2-2$$

$$h(-2)=x^2-2x,\ h(2)=x^2+2x$$

の最小のものが $y$ の下限である．

結局，$y=x^2-2, y=x^2-2x, y=x^2+2x$ が上限，下限を与える．これを図示し，これらの間にある部分（境界を除く）が求める領域である．

## 2　数学Ⅲ【複素数平面】標準

**▶解答◀**　（**1**）　$f(0)=c=\boldsymbol{\alpha}$

$$f(1)=a+b+c=\beta$$

$$a+b=\beta-\gamma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$f(i)=-a+bi+c=\gamma$$

$$-a+bi=\gamma-\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$①\times i-②$ より

$$(1+i)a=(\beta-\alpha)i-(\gamma-\alpha)$$

$$2a=\{(\beta-\alpha)i-(\gamma-\alpha)\}(1-i)$$

$$=\{\beta-\alpha-(\gamma-\alpha)\}+\{(\gamma-\alpha)+(\beta-\alpha)\}i$$

$$=(\beta-\gamma)+(\beta+\gamma-2\alpha)i$$

$$a=\boldsymbol{\frac{1}{2}\{(\beta-\gamma)+(\beta+\gamma-2\alpha)i\}}$$

①＋② より

$$(1+i)b=\beta+\gamma-2\alpha$$

$$2b=(\beta+\gamma-2\alpha)(1-i)$$

$$b=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\beta+\gamma-2\alpha)(1-i)}$$

（**2**）　$f(2)=4a+2b+c$

$$=2(\beta-\gamma)+2(\beta+\gamma-2\alpha)i$$

$$+(\beta+\gamma-2\alpha)-(\beta+\gamma-2\alpha)i+\alpha$$

$$=(-\alpha+3\beta-\gamma)+(-2\alpha+\beta+\gamma)i$$

$f(2)=x+yi$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha+3\beta-\gamma \\ -2\alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\gamma=0$ として，$\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $1 \leqq \alpha \leqq 2$，$1 \leqq \beta \leqq 2$ の範囲で動かすと，図 1 の網目部分となる．この図形を $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に平行移動すると図 2 を得る．

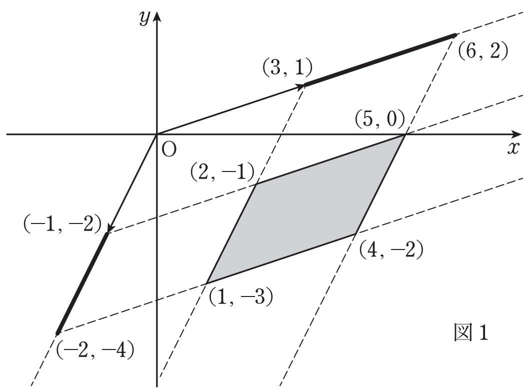



図 1

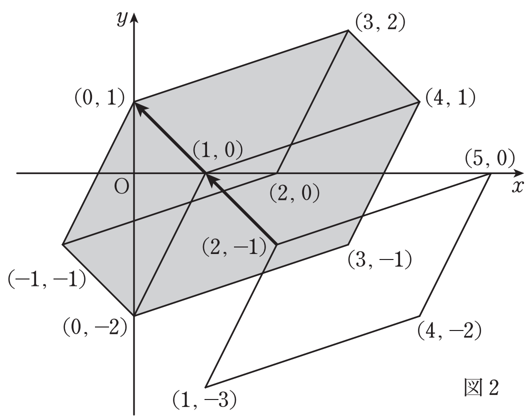



図 2

## 3　数学Ⅲ【定積分】標準

**▶解答◀**　（**1**）

$$f'(x)=\frac{x^2+3-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$

であるから，

$$g(x)=\frac{2}{16}(x-1)+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$$

$f(x)$ と $g(x)$ を連立して

$$\frac{x}{x^2+3}=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$$

$$8x=(x+1)(x^2+3)$$

$$x^3+x^2-5x+3=0$$

$$(x-1)^2(x+3)=0 \qquad \therefore\quad x=1,\ -3$$

よって $C$ と $l$ の共有点のうち A と異なるものはただ 1 つであり，その $x$ 座標は $\boldsymbol{-3}$ である．

（**2**）$\{f(x)-g(x)\}^2=\left\{\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{8}(x+1)\right\}^2$

$$=\frac{1}{64}(x+1)^2-\frac{1}{4}\cdot\frac{x(x+1)}{x^2+3}+\frac{(x^2+3)-3}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{1}{64}(x+1)^2-\frac{1}{4}\left(1+\frac{x-3}{x^2+3}\right)+\frac{1}{x^2+3}-\frac{3}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{1}{64}(x+1)^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+3}+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x^2+3}-\frac{3}{(x^2+3)^2}$$

ここで，

$$I=\int_{-3}^{1}\left\{\frac{1}{64}(x+1)^2-\frac{1}{4}\right\}dx$$

$$J=\int_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+3}\right)dx$$

$$K=\int_{-3}^{1}\left\{\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x^2+3}-\frac{3}{(x^2+3)^2}\right\}dx$$

とおく．

$$I=\left[\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{3}(x+1)^3-\frac{x}{4}\right]_{-3}^{1}$$

$$=\frac{1}{192}\cdot\{8-(-8)\}-\frac{1}{4}\cdot\{1-(-3)\}$$

$$=\frac{1}{12}-1=-\frac{11}{12}$$

$$J=\left[-\frac{1}{8}\log(x^2+3)\right]_{-3}^{1}$$

$$=-\frac{1}{8}(\log 4-\log 12)=\frac{1}{8}\log 3$$

$K$ において $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと，$dx=\sqrt{3}\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ であり

| $x$ | $-3\ \to\ 1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $-\frac{\pi}{3}\ \to\ \frac{\pi}{6}$ |

$$K=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left\{\frac{7}{12(\tan^2\theta+1)}-\frac{3}{9(\tan^2\theta+1)^2}\right\}\cdot\frac{\sqrt{3}d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{3}\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{6}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\sqrt{3}\left[\frac{5}{12}\theta-\frac{1}{12}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi-\frac{1}{4}$$

よって，求める定積分は

$$I+J+K=-\frac{11}{12}+\frac{1}{8}\log 3+\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi-\frac{1}{4}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{7}{6}+\frac{1}{8}\log 3+\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi}$$

## 4 数学A【剰余による分類】やや難

**▶解答◀**（**1**）$K,\ A,\ L,\ B$ を 4 で割った余りを順に $k,\ a,\ l,\ b$ とする．この $a,\ b$ は（2）以降の $a,\ b$ とは別物である．$K,\ L$ は奇数だから，$k,\ l$ も奇数で，1 または 3 である．また，$0\leqq a\leqq 3,\ 0\leqq b\leqq 3$ である．以下合同式はすべて mod 4 とする．

$KA=LB$ より，$ka\equiv lb$ である．さらに，$K$ を 4 で割った余りが $L$ を 4 で割った余りと等しいならば，$k=l$ であり，$ka\equiv kb$ となる．$k(a-b)\equiv 0$ であるから $k\equiv\pm 1$ より，$\pm(a-b)\equiv 0$ である．よって $a-b$ は 4 の倍数で，$-3\leqq a-b\leqq 3$ であるから $a-b=0$ となり，$a=b$ である．証明された．

（**2**）${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$

$$=\frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a}{4b}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4(a-b)+1}{1}$$

この中の分子と分母が 4 の倍数の項について，各分数で 4 ずつ約分すると

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\cdots\cdot\frac{a-b+1}{1}={}_a\mathrm{C}_b$$

となる．分子と分母が 4 で割って余り 2 の項について，各分数で 2 ずつ約分すると

$$\frac{2a-1}{2b-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2(a-b+1)-1}{2\cdot 1-1}\ \cdots\cdots\text{①}$$

となり，この分子と分母は奇数である．分子と分母が 4 で割って余り 1，3 の項についても分子と分母は奇数である．よって奇数 $K,\ L$ を用いて

$$A=\frac{L}{K}B\ \cdots\cdots\text{②}$$

の形となるから，題意は証明された．

（**3**）① の各分数は $\dfrac{2(a-m)-1}{2(b-m)-1}$ の形をしている．$m$ は $0\leqq m\leqq b-1$ の整数である．$a-b$ が 2 で割り切れるから分子と分母の差

$$\{2(a-m)-1\}-\{2(b-m)-1\}=2(a-b)$$

は 4 の倍数である．よって分母を 4 で割った余りと分子を 4 で割った余りは等しい．① の各分数について，分母

にある「4 で割って余りが 3 である奇数の個数」と，分子にある「4 で割って余りが 3 である奇数の個数」は等しい．よって，$K, L$ 内にある「4 で割って余りが 3 である奇数の個数」は等しく（これを $x$ 個とする)，「4 で割って余りが 1 である奇数の個数」も等しい（これを $y$ 個とする)．このとき，

$$K \equiv 1^y \cdot 3^x,\ L \equiv 1^y \cdot 3^x$$

の形となり，② の $K, L$ について，$K$ を 4 で割った余りと $L$ を 4 で割った余りは等しい．（1）より ${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい．

（4） ${}_{2021}\mathrm{C}_{37} = {}_{4\cdot505+1}\mathrm{C}_{4\cdot9+1}$

$$\equiv {}_{505}\mathrm{C}_9 = {}_{4\cdot126+1}\mathrm{C}_{4\cdot2+1}$$

$$\equiv {}_{126}\mathrm{C}_2 = \frac{126\cdot125}{2} = 63\cdot125$$

$$\equiv 3\cdot1 = \mathbf{3}$$

**注意【素因数 2 の個数を数える】**

（2）では次の方法が使える．ガウス記号 [ ] を用いる．自然数 $n$ に対して $n!$ がもつ素因数 2 の個数を数える関数を $f(n)$ とすると

$$f(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \cdots$$

である．

$${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} = \frac{(4a+1)!}{(4b+1)!(4a-4b)!}$$

$$f(4a+1) = \left[\frac{4a+1}{2}\right] + \left[\frac{4a+1}{2^2}\right] + \cdots$$

$$= 2a + a + \left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{a}{2^2}\right] + \cdots$$

$$= 3a + f(a)$$

同様に $f(4b+1) = 3b + f(b)$，

$f(4a-4b) = 3(a-b) + f(a-b)$ となり，

（${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ がもつ素因数 2 の個数）

$$= f(4a+1) - f(4b+1) - f(4a-4b)$$

$$= \{3a + f(a)\} - \{3b + f(b)\} - \{3a - 3b + f(a-b)\}$$

$$= f(a) - f(b) - f(a-b)$$

＝（${}_a\mathrm{C}_b$ がもつ素因数 2 の個数）

である．よって $\dfrac{{}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}}{{}_a\mathrm{C}_b}$ は分母と分子が正の奇数の分数（あるいは正の整数）になる．

ただし，（3）では 4 で割って余りが 3 の項の考察が必要であるから，素因数 2 の個数だけ数えればよいというわけではない．

## 5

**数学III【関数の増減・極値】標準**

**▶解答◀**（1） 与えられた条件より，

$$f(\theta) = (\theta + \sin\theta + \alpha)^2 + (\cos\theta + 3)^2$$

であるから，

$$f'(\theta) = 2(\theta + \sin\theta + \alpha)(1 + \cos\theta) + 2(\cos\theta + 3)(-\sin\theta)$$

$$= 2\{\theta(1 + \cos\theta) - 2\sin\theta + \alpha(1 + \cos\theta)\}$$

$f'(\theta) = 0$ のとき，

$$\alpha(1 + \cos\theta) = 2\sin\theta - \theta(1 + \cos\theta)$$

$0 < \theta < \pi$ より，$1 + \cos\theta > 0$ である．

$$\alpha = \frac{2\sin\theta}{1 + \cos\theta} - \theta = \frac{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} - \theta$$

$$= 2\tan\frac{\theta}{2} - \theta$$

ここで

$$g(\theta) = 2\tan\frac{\theta}{2} - \theta$$

とおくと

$$g'(\theta) = 2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - 1 = \tan^2\frac{\theta}{2} > 0$$

$g(\theta)$ は $0 < \theta < \pi$ で増加関数であり，$g(0) = 0$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0} g(\theta) = +\infty$ であるから，$\alpha\ (>0)$ に対して $g(\theta) = \alpha$ となる $\theta$ がただ 1 つ存在する．すなわち，$f'(\theta) = 0$ となる $\theta$ もただ 1 つ存在する．この，$g(\theta) = \alpha$ となる $\theta$ となる $\theta$ を $\beta$ とする．

（2） $f(\theta)$ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ で連続であるから増減は $0 < \theta < \pi$ で調べる．$g(\theta)$ は 0 から $\infty$ まで増加するから

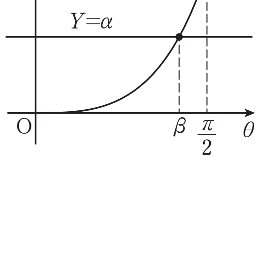
$$f'(\theta) = 2(1 + \cos\theta)\{\alpha - g(\theta)\}$$

は $\beta$ の前後で正から負に符号を変える．

| $\theta$ | 0 | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(\theta)$ | | ↗ | | ↘ | |

これより，$f(\theta)$ は $\theta = \beta$ で極大かつ最大となる．$g(0) = 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$ であるから $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ となる条件は

$$\mathbf{0 < \alpha < 2 - \frac{\pi}{2}}$$



**6** 数学A【整数の雑題】標準

▶解答◀　（1）　$(x^2+px+q)(x^2-px+r)$

$= x^4+(q+r-p^2)x^2+p(r-q)x+qr$

恒等式であることから，係数を比べ

$$q+r-p^2=0,\ p(r-q)=b,\ qr=c$$

$$r+q=p^2,\ r-q=\frac{b}{p}$$

$$q=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)},\ r=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)}$$

（2）　上の結果を $qr=c$ に代入し

$$\frac{1}{4}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)\left(p^2-\frac{b}{p}\right)=c$$

$$p^6-b^2=4p^2c$$

ここに，問題に与えられた $b, c$ の式を代入し

$$p^6-(a^2+1)^2(a+2)^2=-(4a+3)(a^2+1)p^2$$

$$p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2$$
$$-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$$

$$\{p^2-(a^2+1)\}$$
$$\times\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$$

よって，$f(t)=\boldsymbol{t^2+1}$，$g(t)=\boldsymbol{(t^2+1)(t+2)^2}$

（3）（3）の問題文にある4次式

$$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)\ \cdots\cdots①$$

は $x^4+bx+c$ である．これは

$$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$$

となる．

（ア）　$p\neq 0$ のとき．（1），（2）のようになる．

（2）より $p^2=a^2+1$ または

$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2=0$

（ア-1）　$p^2=a^2+1$ のとき：$p=\pm\sqrt{a^2+1}$ となる．$\sqrt{a^2+1}$ は整数のルートであり，これが有理数になるとき，$p$ は整数である．

$$(p-a)(p+a)=1$$

$$(p+a,\ p-a)=(1,1), (-1,-1)$$

$$(p, a)=(1,0), (-1,0)$$

これを（2）の問題文にある式に代入し，$b=2$ となる．これは整数であるから（1）より $q, r$ も有理数となる．

（ア-2）　$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2=0$ ……② のとき：

$$p^4>0,\ (a^2+1)p^2>0,\ (a^2+1)(a+2)^2\geqq 0$$

であるから，

$$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0$$

よって，② とはなりえない．

（イ）　$p=0$ のとき．

$$(x^2+q)(x^2+r)=x^4+(q+r)x^2+qr$$

より1次の項の係数は0である．よって，① より

$$(a^2+1)(a+2)=0 \qquad \therefore\quad a=-2$$

となる．このとき

$$x^4+\frac{25}{4}=x^4+(q+r)x^2+qr$$

となる．係数を比べると $q+r=0$ かつ $qr=\frac{25}{4}$ となる．$r$ を消去すると $q^2+\frac{25}{4}=0$ となるが，このとき左辺は正であるから不適である．

以上より，有理数係数の2次式の積に因数分解できるような $a$ は $a=\boldsymbol{0}$ だけである．

注意【結果】

$$x^4+2x-\frac{3}{4}=\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)$$

**要の分析**　**1** が点取り問題ではなくなった分，飛び抜けて難しい問題も影を潜めた．目新しい問題は少なく，一つ一つの作業は典型であるものが多いが，計算量と忍耐力が要求される．試験場で完答するのには力がいる．

（）