1 a, b を実数とする．座標平面上の放物線 $y=x^2+ax+b$ を C とおく．C は，原点で垂直に交わる 2 本の接線 l_1, l_2 を持つとする．ただし，C と l_1 の接点 P_1 の x 座標は，C と l_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする．

（1） b を a で表せ．また a の値はすべての実数をとりうることを示せ．

（2） $i=1, 2$ に対し，円 D_i を，放物線 C の軸上に中心を持ち，点 P_i で l_i と接するものと定める．D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍となるとき，a の値を求めよ．

（22　東大・文科）

1 数学II【接線】標準

▶解答◀ （1） $y'=2x+a$ であることから，x 座標が t の点における C の接線は

$$y=(2t+a)(x-t)+(t^2+at+b)$$

$$y=(2t+a)x-t^2+b$$

である．これが原点を通るとき

$$-t^2+b=0 \qquad \therefore\quad t^2=b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる．$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ の x 座標を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，これらは ① の解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta=-b$$

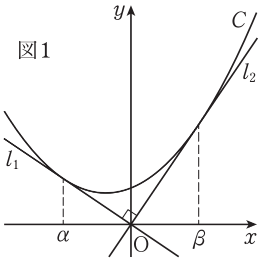
l_1 の傾きは $2\alpha+a$，l_2 の傾きは $2\beta+a$ で，これらは垂直に交わるから

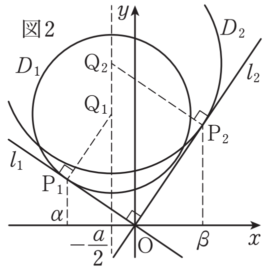
$$(2\alpha+a)(2\beta+a)=-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$4\alpha\beta+2a(\alpha+\beta)+a^2=-1$$

$$-4b+a^2=-1$$

よって，$b=\boldsymbol{\dfrac{a^2+1}{4}}$ である．① が異なる 2 つの実数解をもつ条件は $b>0$，すなわち $\dfrac{a^2+1}{4}>0$ であるが，これはすべての実数 a について成立する．よって，a の値はすべての実数をとりうる．





（2） C の軸は $x=-\dfrac{a}{2}$ である．また，

$m_1=2\alpha+a,\ m_2=2\beta+a$ とおき，D_1, D_2 の中心を $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ とすると，$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ は P_1 を通り，l_2 に平行な直線であるから

$$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=\sqrt{1+{m_2}^2}\left|-\frac{a}{2}-\alpha\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+{m_2}^2}\,|\,m_1\,|$$

同様に考えて

$$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2=\sqrt{1+{m_1}^2}\left|\beta-\left(-\frac{a}{2}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+{m_1}^2}\,|\,m_2\,|$$

となる．これより

$$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2=2\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$$

$$\mathrm{P}_2{\mathrm{Q}_2}^2=4(\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1)^2$$

$$\frac{1}{4}(1+{m_1}^2){m_2}^2=(1+{m_2}^2){m_1}^2$$

$${m_2}^2+(m_1m_2)^2=4{m_1}^2+4(m_1m_2)^2$$

$m_1m_2=-1$ であるから

$$\frac{1}{{m_1}^2}+1=4{m_1}^2+4$$

$$1+{m_1}^2=4{m_1}^4+4{m_1}^2$$

$$4{m_1}^4+3{m_1}^2-1=0$$

$$(4{m_1}^2-1)({m_1}^2+1)=0$$

m_1 は l_1 の傾きで，負であるから $m_1=-\dfrac{1}{2}$ となる．$m_1=2\alpha+a$ であるから，

$$2\alpha=-\frac{1}{2}-a$$

両辺を平方して

$$4\alpha^2=\left(-\frac{1}{2}-a\right)^2$$

ここで，α は ① の解より $\alpha^2=b=\dfrac{a^2+1}{4}$ であるから，

$$a^2+1=a^2+a+\frac{1}{4}$$

ゆえに，$a=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$ である．

（ホクソム・安田 亨とその仲間たち）