2 $y=x^3-x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\alpha^3-\alpha)$ を通り，点Pにおける C の接線と垂直に交わる直線を l とする．C と l は相異なる3点で交わるとする．

（1） α のとりうる値の範囲を求めよ．

（2） C と l の点P以外の2つの交点の x 座標を β,γ とする．ただし $\beta<\gamma$ とする．$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1\neq 0$ となることを示せ．

（3）（2）の β,γ を用いて，

$$u=4\alpha^3+\frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}$$

と定める．このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ．（22　東大・文科）

2

数学Ⅱ【法線】**標準**

▶解答◀ **(1)** $y'=3x^2-1$ より，x 座標が α の点における接線の傾きは $3\alpha^2-1$ である．$\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，l は y 軸と平行な直線となり，C と l は相異なる3点で交わらない．ゆえに $\alpha\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ であり，l の傾きは $-\frac{1}{3\alpha^2-1}$ であるから，l の方程式は

$$y=-\frac{1}{3\alpha^2-1}(x-\alpha)+(\alpha^3-\alpha)$$

これと $y=x^3-x$ を連立すると

$$x^3-x=-\frac{1}{3\alpha^2-1}(x-\alpha)+(\alpha^3-\alpha)$$

$$(x-\alpha)\left\{x^2+\alpha x+\left(\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}\right)\right\}=0$$

ここで，$g(x)=x^2+\alpha x+\left(\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}\right)$ とおく．ここで，$g(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつ条件は，$g(x)$ の判別式を D とすると

$$D=\alpha^2-4\left(\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}\right)$$

$$=-3\alpha^2+4-\frac{4}{3\alpha^2-1}>0$$

$$\frac{-9\alpha^4+15\alpha^2-8}{3\alpha^2-1}>0$$

ここで，$-9\alpha^4+15\alpha^2-8=-9\left(\alpha-\frac{15}{18}\right)^2-\frac{7}{4}<0$ であるから，条件は $\frac{1}{3\alpha^2-1}<0$，すなわち，$-\frac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\frac{1}{\sqrt{3}}$ である．

さらに，この2解が α とも異なることを示す．

$$g(\alpha)=\alpha^2+\alpha^2+\left(\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}\right)$$

$$=(3\alpha^2-1)+\frac{1}{3\alpha^2-1}$$

$$=\frac{(3\alpha^2-1)^2+1}{3\alpha^2-1}\neq 0$$

であるから，α は $g(x)=0$ の解にはならない．

よって，α のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(2) $g(x)=0$ の2解が β,γ だから，解と係数の関係より

$$\beta+\gamma=-\alpha,\ \beta\gamma=\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}$$

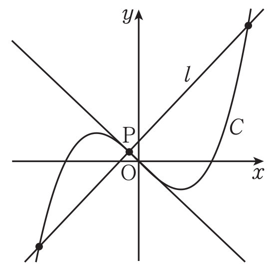
このとき

$$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1$$

$$=(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma-1$$

$$=\alpha^2-\left(\alpha^2+\frac{1}{3\alpha^2-1}\right)=-\frac{1}{3\alpha^2-1}\neq 0$$

となるから示された．



(3)（2）より $\frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}=-3\alpha^2+1$ であるから

$$u=4\alpha^3-3\alpha^2+1$$

$f(\alpha)=4\alpha^3-3\alpha^2+1$ とおくと

$$f'(\alpha)=12\alpha^2-6\alpha=6\alpha(2\alpha-1)$$

であるから，$-\frac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\frac{1}{\sqrt{3}}$ における $f(\alpha)$ の増減表は次のようになる．

α	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		↗		↘		↗	

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{9}-1+1=-\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$f(0)=1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}-1+1=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

であり，$1>\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ であるから，$u=f(\alpha)$ のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{4\sqrt{3}}{9}<u\leqq 1}$$

（ホクソム・安田 亨とその仲間たち）