3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = {a_n}^2 + n(n+2) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

（１） a_{2022} を３で割った余りを求めよ．

（２） $a_{2022},\ a_{2023},\ a_{2024}$ の最大公約数を求めよ．　　（22　東大・文科）

3

数学A【剰余による分類】標 準

▶解答◀ （１） 合同式の法を３とする．

$$a_{6n} \equiv 2,\ a_{6n+1} \equiv 1,\ a_{6n+2} \equiv 1,$$

$$a_{6n+3} \equiv 0,\ a_{6n+4} \equiv 0,\ a_{6n+5} \equiv 0$$

であることを数学的帰納法によって示す．$a_0 = 2$ と定めると，漸化式は $n = 0$ でも成立する．

$n = 0$ のとき，$a_0 = 2,\ a_1 = 4 \equiv 1,$
$a_2 \equiv 1^2 + 1 \cdot 3 \equiv 1,\ a_3 \equiv 1^2 + 2 \cdot 4 \equiv 0,$
$a_4 \equiv 0^2 + 3 \cdot 5 \equiv 0,\ a_5 \equiv 0^2 + 4 \cdot 6 \equiv 0$ より条件を満たしている．

$n = k$ で成立しているとすると，$a_{6k+5} \equiv 0$ である．このとき

$$a_{6(k+1)} \equiv 0^2 + (6k+5)(6k+7) \equiv 2$$

$$a_{6(k+1)+1} \equiv 2^2 + (6k+6)(6k+8) \equiv 1$$

$$a_{6(k+1)+2} \equiv 1^2 + (6k+7)(6k+8) \equiv 1$$

$$a_{6(k+1)+3} \equiv 1^2 + (6k+8)(6k+9) \equiv 0$$

$$a_{6(k+1)+4} \equiv 0^2 + (6k+9)(6k+10) \equiv 0$$

$$a_{6(k+1)+5} \equiv 0^2 + (6k+10)(6k+11) \equiv 0$$

であるから，$n = k+1$ でも成立する．

よって，数学的帰納法によって示された．

$2022 = 6 \cdot 337$ であるから，$a_{2022} \equiv \mathbf{2}$ である．

（２） $n(n+2) = a_{n+1} - {a_n}^2$

$$(n+1)(n+3) = a_{n+2} - {a_{n+1}}^2$$

であるから，$a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}$ がともに素因数 d を持つとすると，$n(n+2),\ (n+1)(n+3)$ はともに d の倍数となる．

$d \geqq 2$ のときを考える．$n+2$ が d の倍数であるとすると，$n+1,\ n+3$ は d の倍数でなくなるから，$(n+1)(n+3)$ が d の倍数でなくなって，矛盾する．ゆえに，n が d の倍数であり，このとき $n+1$ は d の倍数でないから，$n+3$ が d の倍数である．ゆえに，n と $n+3$ がともに d の倍数より，２以上の最大公約数があるとしたら，それは $d = 3$ に限られる．

しかし，（１）で見たように，a_{2022} は３の倍数でないから，$d = 3$ とはならない．よって $a_{2022},\ a_{2023},\ a_{2024}$ は２以上の公約数をもたないから，それらの最大公約数は **1** である．

（ホクソム・安田 亨とその仲間たち）