**4** Oを原点とする座標平面上で考える．0以上の整数 $k$ に対して，ベクトル $\vec{v_k}$ を

$$\vec{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める．投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを $N$ 回投げて，座標平面上に点 $X_0, X_1, X_2, \cdots, X_N$ を以下の規則（i），（ii）に従って定める．

（i） $X_0$ はOにある．

（ii） $n$ を1以上 $N$ 以下の整数とする．$X_{n-1}$ が定まったとし，$X_n$ を次のように定める．

- $n$ 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{OX_n}=\overrightarrow{OX_{n-1}}+\vec{v_k}$$

により $X_n$ を定める．ただし，$k$ は1回目から $n$ 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする．

- $n$ 回目のコイン投げで裏が出た場合，$X_n$ を $X_{n-1}$ と定める．

（1） $N=5$ とする．$X_5$ がOにある確率を求めよ．

（2） $N=98$ とする．$X_{98}$ がOにあり，かつ，表が90回，裏が8回出る確率を求めよ．　（22　東大・文科）

## 4

**数学A**【確率の雑題】**やや難**

**考え方**　問題文の条件がとても分かりづらいので，まずは整理しよう．$k$ を3で割った余りによって $\vec{v_k}$ を分類すると，

$k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$ のとき

$$\vec{v_k}=(1,\ 0)\longrightarrow 右向き$$

$k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)$ のとき

$$\vec{v_k}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\longrightarrow 左上向き$$

$k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,3)$ のとき

$$\vec{v_k}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\longrightarrow 左下向き$$

ということであるから，これをもとにまずいくつか実験をしてみる．

例えば，コインを6回投げて，

表裏表裏表裏

というように出るとする．はじめはそれまでに出ている裏の数が0であるから，1回目の表では右向きに進む．次の裏で進行方向が変わり（進みはしない），2回目の表では左上向きに進む．また次の裏で進行方向が変わり（進みはしない），次の3回目の表で左下向きに進んで，図01のような図を描く．

もう1つ別の例を考えてみる．コインを9回投げて，

表表裏表表裏裏表表

と出るとする．はじめ表が2回連続出るので，右方向に長さ2進む．次の裏で進行方向を変え，次の2連続の表で左上向きにまた長さ2進む．その次は裏が2連続で出ているので，進行方向が2回（すなわち，240度）変わる．そして，最後の2連続の表でまた右向きに長さ2進んで，図02のような図を描く．

つまり，裏が出る度に進行方向が変わり，その後表が連続して出る分だけ，それぞれの方向に進むということである．

このイメージをもてるかどうかが，この問題を解く重要なカギである．

**▶解答◀**　（1）　5回すべて裏が出た場合は原点から動かないので $X_5$ がOにある．1度でも表が出た場合に原点に戻ることがあるかどうか調べる．

$k$ を3で割った余りによって $\vec{v_k}$ を分類する．

$k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$ のとき

$$\vec{v_k}=(1,\ 0)$$

$k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)$ のとき

$$\vec{v_k}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,3)$ のとき

$$\vec{v_k}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である．はじめ $X_0$ がOにある状態で，そのとき動くと

する（すなわち，コインの表が出る）ならば，右向きに点が動く（$k=0$）．そのまま表が出続ければ，ずっと右に進んでいくが，裏が出ると進む方向が 120° 回転して，表が出た分だけ左上に進む．そして，また裏が出たら 120° 回転して，表が出た分だけ左下に進む．これをずっと繰り返していく．右向きに進む（$k\equiv 0 \pmod 3$）ことを $A$，左上に進む（$k\equiv 1 \pmod 3$）ことを $B$，左下に進む（$k\equiv 2 \pmod 3$）ことを $C$ とする．

$A, B, C$ の回数をそれぞれ $x, y, z$ 回とおくと，表が出る回数の合計が $x+y+z$ であり，1 回でも表が出て原点に戻るための条件は，

$$x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \text{ かつ } \frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0$$

である．したがって，

$$y=z \text{ かつ } x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0$$

$$x=y=z \quad \cdots\cdots\cdots① $$

すなわち，$A, B, C$ に同じ分ずつ進む（表が同じ数ずつ出る）ということである．

$N=5$ の場合にこれが起こり得るのは，

表（$A$）→ 裏 → 表（$B$）→ 裏 → 表（$C$）

の順のときのみである．

したがって，$\mathrm{X}_5$ が O にいる確率は，

$$\frac{1+1}{2^5}=\boldsymbol{\frac{1}{16}}$$

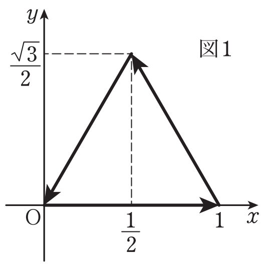


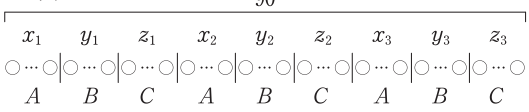
図1

（**2**） 裏が 8 回しか出ないと言っているので，原点にずっととどまっていることはなく，必ず動かなければならない．よって，（1）と同様 ① を満たし，表が 90 回出ることより

$$x=y=z=30$$

である．裏が出るごとに進む向きが 120° 回転するので，表が出ることを○，裏が出ることを | で表すと，裏が 8 回出ることから，進む向きの変わり方は下の図 2 のようになる．

図2



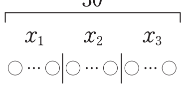

ここで，丸の上の文字は丸の数を表しており，$x=x_1+x_2+x_3$，$y=y_1+y_2+y_3$，$z=z_1+z_2+z_3$ である．$x_i, y_i, z_i$ $(i=1, 2, 3)$ ともに 0 でもよいものとする．

今，$x=30$ であるから，

$$x_1+x_2+x_3=30,\ x_i \geqq 0\ (i=1, 2, 3)$$

であり，これは $x=30$ をさらに 3 部屋（0 個の部屋があってもよい）に分けて（図 3），その分けたものをそれぞれ図 2 の $x_1$，$x_2$，$x_3$ に入れるということである．$y, z$ についても同様である．

図3




したがって，30 個の○と 2 個の仕切りの並びかえ（2 個の仕切りが同じところに入ってもよい）を考えて，

$${}_{32}\mathrm{C}_2=31\cdot 16$$

なお，今回の仕切りは部屋を分けるための便宜的なものであって，裏が出ることを表しているわけではないことに注意せよ．

これが 3 つ分であるから，求める確率は，

$$\frac{(31\cdot 16)^3}{2^{98}}=\frac{31^3\cdot 2^{12}}{2^{98}}=\boldsymbol{\frac{31^3}{2^{86}}}$$

**注意 1°【どこまでしっかり議論すべきか】**

（1）だけを解くのであれば，ここまでしっかりと書く必要はないかもしれない．本解では，連立方程式を立てて条件を整理したが，そこまでしなくとも，直観的に原点に戻ってくるのはこのパターンしかないだろうということで答えを出してしまっても，ある程度の点はもらえるのではないだろうか？

（ホクソム・安田 亨とその仲間たち）