1 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=(\cos x)\log(\cos x)-\cos x+\int_0^x(\cos t)\log(\cos t)\,dt \qquad \left(0 \leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

（1） $f(x)$ は区間 $0 \leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ．

（2） $f(x)$ の区間 $0 \leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ．　　（22　東大・理科）

1

数学III【定積分で表された関数】標準

▶解答◀ （1）

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\sin x\log(\cos x)\\&\quad+\cos x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}+\sin x+\cos x\log(\cos x)\\&=(\cos x-\sin x)\log(\cos x)\\&=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\log(\cos x)\end{aligned}$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0<\cos x<1$ だから $\log(\cos x)<0$

また，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)>0$，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}-x<0$ であるから $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)<0$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

よって，$x=\dfrac{\pi}{4}$ で最小値をもつ．

（2）
$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\&\quad+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)\,dt\end{aligned}$$

$I=\displaystyle\int(\cos t)\log(\cos t)\,dt$ とおく．

$$\begin{aligned}2I&=\int(\cos t)\log(\cos^2 t)\,dt\\&=\int(\cos t)\log(1-\sin^2 t)\,dt\end{aligned}$$

$s=\sin t$ とおくと $ds=\cos t\,dt$ であり，

$$\begin{aligned}2I&=\int\log(1-s^2)\,ds=\int\log(1-s)(1+s)\,ds\\&=\int\log(1+s)\,ds+\int\log(1-s)\,ds\\&=(1+s)\log(1+s)-(1-s)\log(1-s)-2s\\2I&=\log\frac{1+s}{1-s}+s\log(1-s^2)-2s\end{aligned}$$

積分定数は省略した．$x:0\to\dfrac{\pi}{4}$ のとき $s:0\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，求める最小値は

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\&\quad+\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+s}{1-s}+s\log(1-s^2)-2s\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)\\&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\\&\quad+\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}\log 2-\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)}\end{aligned}$$

注意 すべて積分定数は省略する．上の積分では $\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-x$ を覚えていて，この x を $1+s$ にした形をイメージして

$$\int\log(1+s)\,ds=(1+s)\log(1+s)-(1+s)$$

とした．右辺を微分すると積分記号の中に戻る．x を $1-s$ にした形をイメージして

$$\int\log(1+s)\,ds=(1-s)\log(1-s)-(1-s)$$

としてみると，右辺を微分しても元に戻らない（符号が違う）から符号を変えて

$$\int\log(1+s)\,ds=-(1-s)\log(1-s)+(1-s)$$

右辺を微分すると積分記号の中に戻る．

◆別解◆ 【積分について】

ここでは $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\log(\cos t)\,dt$ とおく．

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t)'\log(\cos t)\,dt\\&=\Big[\sin t\log(\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t(\log(\cos t))'\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cdot\frac{-\sin t}{\cos t}\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos t}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t}$$

$J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t}$ とおく．

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{(1-\sin t)(1+\sin t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{-(1-\sin t)'}{1-\sin t} + \frac{(1+\sin t)'}{1+\sin t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\log|1-\sin t| + \log|1+\sin t| \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

よって，これらを元に戻して

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$= \sqrt{2}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + \log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}\log 2 - \sqrt{2} + \log\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

（ホクソム・安田 亨とその仲間たち）