2 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1=1,\ a_{n+1}={a_n}^2+1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

（1） 正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ．

（2） $k,\ n$ を正の整数とする．a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を $k,\ n$ を用いて表せ．

（3） a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ．（22 東大・理科）

2

数学A【剰余による分類】標準

▶解答◀ （1） 合同式の法を 5 とする．

$$a_{3n}\equiv 0,\ a_{3n+1}\equiv 1,\ a_{3n+2}\equiv 2$$

であることを数学的帰納法によって示す．$a_0=0$ と定めると，漸化式は $n=0$ でも成立する．

$n=0$ のとき，$a_0=0,\ a_1=1\equiv 1,\ a_2=2$ より成立している．

$n=k$ で成立しているとすると，$a_{3k+2}\equiv 2$ である．このとき

$$a_{3(k+1)}\equiv 2^2+1\equiv 0$$

$$a_{3(k+1)+1}\equiv 0^2+1\equiv 1$$

$$a_{3(k+1)+2}\equiv 1^2+1\equiv 2$$

より，$n=k+1$ でも成立する．

よって，n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数である．

（2） 合同式の法を a_k とする．数列 $\{a_n\}$ は単調増加であるから，$a_1,\ \cdots,\ a_{k-1}$ は a_k の倍数とならず，a_k で初めて a_k の倍数となる．

$$a_{k+1}\equiv 0^2+1\equiv a_1,\ a_{k+2}\equiv {a_1}^2+1\equiv a_2,$$

$$a_{k+3}\equiv {a_2}^2+1\equiv a_3,\ \cdots$$

などと，a_n を a_k で割った余りは

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1},\ 0$$

を繰り返すので，a_n が a_k の倍数となる必要十分条件は，**n が k の倍数であること**である．

（3） 2022, 8091 はともに 3 の倍数だから，$a_{2022},\ a_{8091}$ はともに $a_3=5$ の倍数である．a_{2022} と a_{8091} の最大公約数を $d\ (d\neq 1,\ 5)$ とすると，a_{8088} は a_{2022} の倍数になるから，合同式の法を d とすると

$$a_{8088}\equiv 0,\ a_{8089}\equiv 0^2+1\equiv 1,$$

$$a_{8090}\equiv 1^2+1\equiv 2,\ a_{8091}\equiv 2^2+1\equiv 5\not\equiv 0$$

となり，d が a_{2022} と a_{8091} の公約数であることに矛盾する．ゆえに，a_{2022} と a_{8091} の最大公約数は 5 である．次に，a_{2022} が 25 の倍数でないことを示す．合同式の法を 25 とすると

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=5,$$

$$a_4\equiv 1,\ a_5\equiv 2,\ a_6\equiv 5,\ \cdots$$

となり，a_n を 25 で割った余りは 1, 2, 5 を繰り返すから，a_{2022} は 5 の倍数だが 25 の倍数ではない．

よって，a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数は **5** である．

（ホクソム・安田 亨とその仲間たち）