3 Oを原点とする座標平面上で考える．座標平面上の2点S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)に対し，点Sが点Tから十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \text{ または } |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する．

不等式

$$0 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域をDとし，その2つの頂点A(3, 0), B(3, 3)を考える．さらに，次の条件（i），（ii）をともに満たす点Pをとる．

（i） 点Pが領域Dの点であり，かつ，放物線$y = x^2$上にある．

（ii） 点Pは，3点O，A，Bのいずれからも十分離れている．

点Pのx座標をaとする．

（1） aのとりうる値の範囲を求めよ．

（2） 次の条件（iii），（iv）をともに満たす点Qが存在しうる範囲の面積$f(a)$を求めよ．

（iii） 点Qは領域Dの点である．

（iv） 点Qは，4点O，A，B，Pのいずれからも十分離れている．

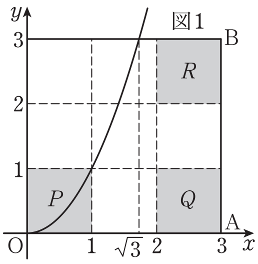
（3） aは（1）で求めた範囲を動くとする．（2）の$f(a)$を最小にするaの値を求めよ．　（22　東大・理科）

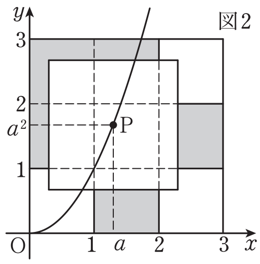
3 数学Ⅱ【面積】標準

▶解答◀ （1） 点S(x_1, y_1), 点T(x_2, y_2)が近いとは

$$|x_1 - x_2| < 1 \quad \text{かつ} \quad |y_1 - y_2| < 1$$

が成り立つことと定義する．D内の点のうち，O，A，Bから近い点の集合をそれぞれP, Q, Rとする．P, Q, Rおよび$y = x^2$を図示すると，次の図のようになる．





Pは，$y = x^2$上で，かつ，領域P, Q, Rのいずれにも含まれていない部分にあるから，そのx座標は，

$\boldsymbol{1 \leqq a \leqq \sqrt{3}}$である．

（2） 領域Xの面積を$[X]$とかくことにする．このとき，Pに近い点の集合をSとすると，求める面積は図2の網目部分であり

$$f(a) = [\,\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R} \cap \overline{S}\,]$$

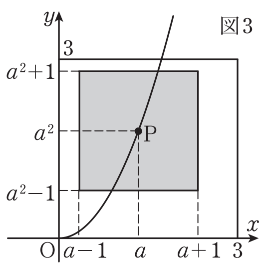
$$= [D] - [P \cup Q \cup R \cup S]$$

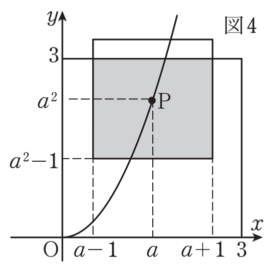
$$= 9 - [P \cup Q \cup R \cup S]$$

ここで

$$[P \cup Q \cup R \cup S]$$
$$= [P] + [Q] + [R] + [S]$$
$$- [P \cap S] - [Q \cap S] - [R \cap S]$$
$$= 3 + [S] - [P \cap S] - [Q \cap S] - [R \cap S]$$

まず，$[S]$について考える．





● $a^2 + 1 \leqq 3$，すなわち，$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$のとき

図3より$[S] = 2 \cdot 2 = 4$である．

● $a^2 + 1 \geqq 3$，すなわち，$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$のとき

図4より$[S] = 2\{3 - (a^2 - 1)\} = 2(4 - a^2)$である．

次に，$[P \cap S]$について考える．$a - 1$と1の大小，$a^2 - 1$と1の大小を考える．$a - 1 \leqq 1$かつ$a^2 - 1 \leqq 1$，すなわち，$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$のときは，図5のようになるから，

$$[P \cap S] = \{1 - (a - 1)\}\{1 - (a^2 - 1)\}$$
$$= (2 - a)(2 - a^2)$$

であり，$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$のとき$[P \cap S] = 0$となる．

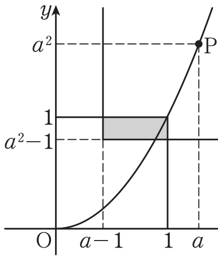


図5

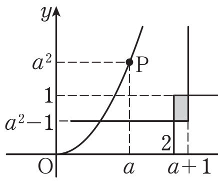


図6

次に，$[Q\cap S]$ について考える．$a+1$ と 2 の大小，a^2-1 と 1 の大小を考える．$a+1\geqq 2$ かつ $a^2-1\leqq 1$，すなわち，$1\leqq a\leqq\sqrt{2}$ のときは，図 6 のようになるから，

$$[Q\cap S]=\{(a+1)-2\}\{1-(a^2-1)\}$$

$$=(a-1)(2-a^2)$$

であり，$\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{3}$ のとき $[Q\cap S]=0$ となる．

最後に，$[R\cap S]$ について考える．$a+1$ と 2 の大小，a^2+1 と 2 の大小を考える．$a+1\geqq 2$ かつ $a^2+1\leqq 2$，すなわち，$1\leqq a$ は常に成り立っている．さらに，a^2+1 と 3 の大小を考える．

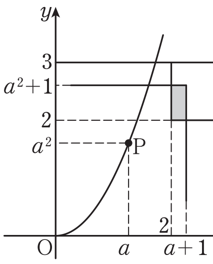


図7

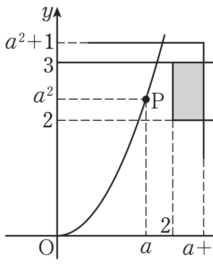


図8

● $a^2+1\leqq 3$，すなわち，$1\leqq a\leqq\sqrt{2}$ のとき

図 7 より

$$[R\cap S]=\{(a+1)-2\}\{(a^2+1)-2\}$$

$$=(a-1)(a^2-1)$$

● $a^2+1\geqq 3$，すなわち，$\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{3}$ のとき

図 8 より

$$[R\cap S]=\{(a+1)-2\}\cdot 1=a-1$$

以上をまとめると

（ア） $\boldsymbol{1\leqq a\leqq\sqrt{2}}$ **のとき**

$$f(a)=9-\{3+4-(2-a)(2-a^2)$$
$$-(a-1)(2-a^2)-(a-1)(a^2-1)\}$$
$$=\boldsymbol{a^3-2a^2-a+5}$$

（イ） $\boldsymbol{\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{3}}$ **のとき**

$$f(a)=9-\{3+2(4-a^2)-0-0-(a-1)\}$$
$$=\boldsymbol{2a^2+a-3}$$

（**3**） $1\leqq a\leqq\sqrt{2}$ のとき

$$f'(a)=3a^2-4a-1$$

$f'(a)=0$ を解くと，$a=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ で

$$\frac{2-\sqrt{7}}{3}<1<\sqrt{2}<\frac{2+\sqrt{7}}{3}$$

となるから，$f'(a)$ は $1\leqq a\leqq\sqrt{2}$ で単調減少である．また，$\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{3}$ では

$$f'(a)=4a+1$$

で単調増加である．よって，$f(a)$ を最小にする a の値は $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ である．

（ホクソム・安田 亨とその仲間たち）