4 座標平面上の曲線

$C : y = x^3 - x$

を考える．

（1） 座標平面上のすべての点Pが次の条件（i）を満たすことを示せ．

（i） 点Pを通る直線 l で，曲線 C と相異なる3点で交わるものが存在する．

（2） 次の条件（ii）を満たす点Pのとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

（ii） 点Pを通る直線 l で，曲線 C と相異なる3点で交わり，かつ，直線 l と曲線 C で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるものが存在する．

（22 東大・理科）

4 数学II【微分と方程式】標準

▶解答◀ （1） $\mathrm{P}(a, b)$ とおく．

直線 $x = a$ は C と異なる3交点をもたないから題意の l は x 軸に垂直ではなく，傾きをもつ．Pを通る直線 l を $l : y = m(x-a)+b$ とおく．C と連立させる．

$$x^3 - x = m(x-a)+b$$

$$x^3-(1+m)x+ma-b=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$f(x) = x^3-(1+m)x+ma-b$ とおく．$f(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつ条件を考察する．

$f'(x) = 3x^2-(1+m)$ となる．$f(x)$ が極値をもたないと $f(x)=0$ が異なる3つの実数解をもたないから不適である．$m+1>0$ のときを考える．このとき $f'(x)=0$ の解は $x = \pm\sqrt{\dfrac{1+m}{3}}$ である．

$p = \sqrt{\dfrac{1+m}{3}}$ とおく．$p^2 = \dfrac{1+m}{3}$ であるから

$$f(p) = p\{p^2-(1+m)\}+ma-b$$

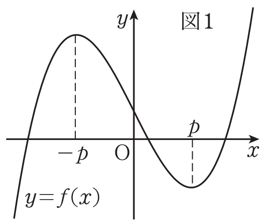
$$f(p) = ma-b-\frac{2}{3}(1+m)p$$

$$f(-p) = ma-b+\frac{2}{3}(1+m)p$$

$$f(p)f(-p) = (ma-b)^2-\frac{4}{9}(1+m)^2p^2$$

$$=(ma-b)^2-\frac{4}{27}(1+m)^3$$

これは m の3次関数で3次の係数は負であるから，十分大きな m に対して $f(p)f(-p)<0$ となり，$f(x)=0$ は3個の異なる実数解をもつ．ゆえに点Pを通る直線 l で，曲線 C と相異なる3点で交わるものが存在する．



（2） ①の3解を小さい順に α, β, γ とする．C と l で囲む2つの部分の面積を左から S, T とする．

$g(x) = x^3-x-(m(x-a)+b)$ とおく．

$$S-T = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx - \int_\beta^\gamma \{-g(x)\}\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta g(x)\,dx + \int_\beta^\gamma g(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma g(x)\,dx$$

ここで

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$=(x-\alpha)\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}\{(x-\alpha)+(\alpha-\gamma)\}$$

$$=(x-\alpha)^3+(2\alpha-\beta-\gamma)(x-\alpha)^2$$

$$+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(x-\alpha)$$

を積分し，

$$S-T = \Big[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4+\frac{1}{3}(2\alpha-\beta-\gamma)(x-\alpha)^3$$

$$-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)(x-\alpha)^2\Big]_\alpha^\gamma$$

$$=\frac{1}{4}(\gamma-\alpha)^4+\frac{1}{3}(2\alpha-\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)^3$$

$$-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3\{3(\gamma-\alpha)$$

$$+4(2\alpha-\beta-\gamma)-6(\alpha-\beta)\}$$

$$=\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3(2\beta-\alpha-\gamma)$$

解と係数の関係から $\alpha+\beta+\gamma=0$ であるから $\alpha+\gamma=-\beta$ となり，

$$S-T = \frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3\cdot 3\beta$$

となる．$S=T$ になる条件は $\beta=0$ である．

①が0を解にもち，かつ，0以外の異なる実数解をもつ条件は $ma-b=0$ かつ $m>-1$ である．$a=0$ のときは $b=0$ である．$a \neq 0$ のときは，Pは原点以外の点で，直線OPが，傾きが -1 より大きな直線であることを示しているから，Pの存在範囲は図3の網目部分であり，境界は原点のみ含む．

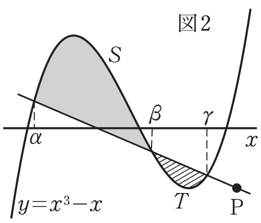


図2

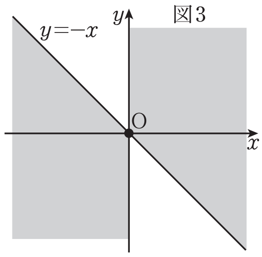


図3