5 座標空間内の点 A$(0, 0, 2)$ と点 B$(1, 0, 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする．S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が PQ $= 2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．　（22　東大・理科）

5 数学Ⅲ【体積】やや難

▶解答◀ AB を z 軸のまわりに回転させると，図 1 のような円錐ができる．P が x 軸上にあるときを考える．

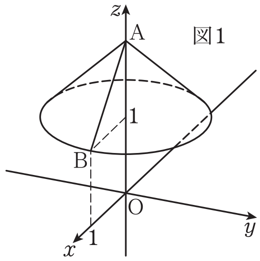


図1

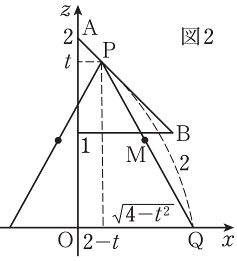


図2

xz 平面上において，AB は $z = -x + 2$ であるから，P として $(2-t, 0, t)$ をとる．

図 2 を見よ．Q も x 軸上にあるとき，$\mathrm{Q}\left(2-t \pm \sqrt{4-t^2}, 0, 0\right)$ となる．P を固定したまま Q を xy 平面上で PQ $= 2$ を保ったまま動かすと，M は $z = \dfrac{t}{2}$ において，$(2-t, 0)$ 中心，半径 $\dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$ の円を動く．ただし，$2-t$ と $\dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$ の大小で場合分けをする．

まず，$2-t \geqq \dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$ を解く．両辺を平方して

$$(2-t)^2 \geqq \frac{1}{4}(4-t^2)$$

$$5t^2 - 16t + 12 \geqq 0$$

$$(t-2)(5t-6) \geqq 0$$

$1 \leqq t \leqq 2$ であるから，M の軌跡は $1 \leqq t \leqq \dfrac{6}{5}$ のときは図 3，$\dfrac{6}{5} \leqq t \leqq 2$ のときは図 4 のようになる．

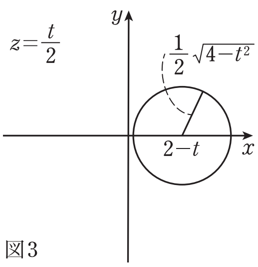


図3

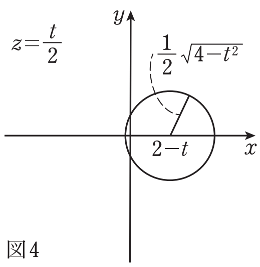


図4

さらに，P を $z = t$ 上で動かすと，M の存在する領域は $1 \leqq t \leqq \dfrac{6}{5}$ のときは図 5，$\dfrac{6}{5} \leqq t \leqq 2$ のときは図 6 のようになる．

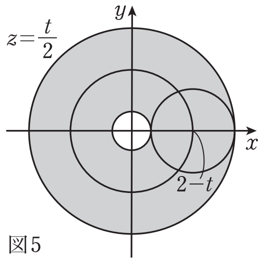


図5

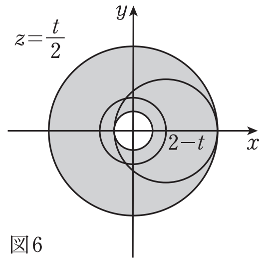


図6

$z = \dfrac{t}{2}$ における M の存在しうる領域の面積を $S(t)$ とすると

- $1 \leqq t \leqq \dfrac{6}{5}$ のとき

$$S(t) = \pi\left\{\left(2-t+\frac{1}{2}\sqrt{4-t^2}\right)^2 - \left(2-t-\frac{1}{2}\sqrt{4-t^2}\right)^2\right\}$$
$$= \left\{2(2-t)\sqrt{4-t^2}\right\}\pi$$

- $\dfrac{6}{5} \leqq t \leqq 2$ のとき

$$S(t) = \pi\left\{\left(2-t+\frac{1}{2}\sqrt{4-t^2}\right)^2 - \left(-(2-t)+\frac{1}{2}\sqrt{4-t^2}\right)^2\right\}$$
$$= \left\{2(2-t)\sqrt{4-t^2}\right\}\pi$$

となり，いずれにしても同じ式になるから，K の体積を V とおくと，$dz = \dfrac{1}{2}dt$ で

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}} S(t)\,dz$$
$$= \int_1^2 (2-t)\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$I = \displaystyle\int_1^2 2\sqrt{4-t^2}\,dt$，$J = \displaystyle\int_1^2 \left(-t\sqrt{4-t^2}\right)dt$ とおくと，I は図 7 の網目部分の面積の 2 倍であるから

$$I = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

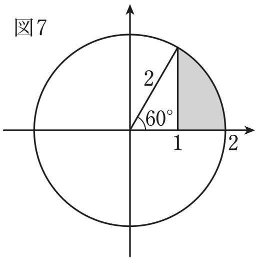
である．また

$$J = \int_1^2 \frac{1}{2}(4-t^2)'\sqrt{4-t^2}\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = -\sqrt{3}$$

であるから

$$V = \pi(I+J) = \boldsymbol{\left(\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)\pi}$$

図7



（ホクソム・安田 亨とその仲間たち）