6 Oを原点とする座標平面上で考える．0以上の整数 k に対して，ベクトル $\vec{v_k}$ を

$$\vec{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める．投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0,\ \mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\ \cdots,\ \mathrm{X}_N$ を以下の規則（ｉ），（ii）に従って定める．

（ｉ） X_0 はOにある．

（ii） n を1以上 N 以下の整数とする．X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める．

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\vec{v_k}$$

により X_n を定める．ただし，k は1回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする．

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める．

（1） $N=8$ とする．X_8 がOにある確率を求めよ．

（2） $N=200$ とする．X_{200} がOにあり，かつ，合計200回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく．ただし $0\leqq r\leqq 200$ である．p_r を求めよ．また p_r が最大となる r の値を求めよ．（22　東大・文科）

6 数学A【確率の雑題】 やや難

考え方　問題文の条件がとても分かりづらいので，まずは整理しよう．k を3で割った余りによって $\vec{v_k}$ を分類すると，

$k\equiv 0\pmod 3$ のとき

$$\vec{v_k}=(1,\ 0)\longrightarrow \text{右向き}$$

$k\equiv 1\pmod 3$ のとき

$$\vec{v_k}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\longrightarrow \text{左上向き}$$

$k\equiv 2\pmod 3$ のとき

$$\vec{v_k}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\longrightarrow \text{左下向き}$$

ということであるから，これをもとにまずいくつか実験をしてみる．

例えば，コインを6回投げて，

表裏表裏表裏

というように出るとする．はじめはそれまでに出ている裏の数が0であるから，1回目の表では右向きに進む．次の裏で進行方向が変わり（進みはしない），2回目の表では左上向きに進む．また次の裏で進行方向が変わり（進みはしない），次の3回目の表で左下向きに進んで，図01のような図を描く．

もう1つ別の例を考えてみる．コインを9回投げて，

表表裏表表裏裏表表

と出るとする．はじめ表が2回連続出るので，右方向に長さ2進む．次の裏で進行方向を変え，次の2連続の表で左上向きにまた長さ2進む．その次は裏が2連続で出ているので，進行方向が2回（すなわち，240度）変わる．そして，最後の2連続の表でまた右向きに長さ2進んで，図02のような図を描く．

つまり，裏が出る度に進行方向が変わり，その後表が連続して出る分だけ，それぞれの方向に進むということである．

このイメージをもてるかどうかが，この問題を解く重要なカギである．

▶解答◀ （1） 8回すべて裏が出た場合は原点から動かないので X_8 がOにある．1度でも表が出た場合に原点に戻ることがあるかどうか調べる．

k を3で割った余りによって $\vec{v_k}$ を分類する．

$k\equiv 0\pmod 3$ のとき

$$\vec{v_k}=(1,\ 0)$$

$k\equiv 1\pmod 3$ のとき

$$\vec{v_k}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$k \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$\vec{v_k} = \left(-\frac{1}{2},\, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である．はじめ X_0 が O にある状態で，そのとき動くとする（すなわち，コインの表が出る）ならば，右向きに点が動く（$k=0$）．そのまま表が出続ければ，ずっと右に進んでいくが，裏が出ると進む方向が 120° 回転して，表が出た分だけ左上に進む．そして，また裏が出たら 120° 回転して，表が出た分だけ左下に進む．これをずっと繰り返していく．右向きに進む（$k \equiv 0 \pmod 3$）進み方を A，左上に進む（$k \equiv 1 \pmod 3$）進み方を B，左下に進む（$k \equiv 2 \pmod 3$）進み方を C とする．

A, B, C の回数をそれぞれ x, y, z 回とおくと，表が出る回数の合計が $x+y+z$ であり，1 回でも表が出て原点に戻るための条件は，

$$x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \text{ かつ } \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$$

を満たすときである．したがって，

$$y = z \text{ かつ } x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0$$

$$x = y = z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

すなわち，A, B, C に同じ分ずつ進む（表が同じ数ずつ出る）ということであるから，表が出る回数の合計は 3 の倍数である．したがって，$N=8$ の場合，考えられるのは表の出る回数の合計が 3, 6 のときである．

（ア） 表の出る回数の合計が 3 のとき．

進む向きに応じて表が出ることを A, B, C，裏が出ることを×で表すと，考えられる進み方は以下の通りである．なお，×が 1 つのときには 120° 回転であり，×が 2 個続くと 240° 回転というように，×の続く個数によって回転角度が変わることに注意せよ．

$A \times B \times C \times\times\times$

$A \times B \times\times\times\times C$

$A \times\times C \times\times B \times$

$A \times\times\times\times B \times C$

$\times B \times C \times A \times\times$

$\times B \times\times A \times\times C$

$\times\times C \times A \times B \times$

$\times\times\times A \times B \times C$

よって，8 通り．

（イ） 表の出る回数の合計が 6 のとき．考えられる進み方は以下の 1 通りのみである．

$AA \times BB \times CC$

したがって，原点から動かない 1 通りと合わせて，X_8 が O にいる確率は，

$$\frac{1+8+1}{2^8} = \mathbf{\frac{5}{128}}$$

（**2**） X_{200} が O にあることから，（1）と同様 ① を満たし，表の出る回数の合計は 3 の倍数である．表の出る回数の合計が 3 の倍数でないときには，原点に戻ってくることはできない．したがって，**r が 3 の倍数でないとき，$p_r = 0$** である．

r が 3 の倍数のとき．$r = 3k$ $(0 \leqq k \leqq 66)$ とおくと，

$$x = y = z = k$$

である．表が出ることを進む向きに応じて A, B, C，裏が出ることを×で表すと，裏が出るごとに進む向きが 120° 回転するので，

図1

$$\overbrace{\underset{x_1}{A\cdots A}\times\underset{y_1}{B\cdots B}\times\underset{z_1}{C\cdots C}\times\ \cdots\ \times\underset{x_{67-k}}{A\cdots A}\times\underset{y_{67-k}}{B\cdots B}\times\underset{z_{67-k}}{C\cdots C}}^{\text{表が全部で}3k}$$

というようになる．このとき，×で仕切られた各部屋の中は 0 個でもよい．A, B, C がそれぞれ k 個，×は全部で $200-3k$ 個であることから，×で区切られた部屋の数は $201-3k = 3(67-k)$ 個である．今，部屋の中身が空になってもよいと考えているので，部屋の数も A, B, C ですべて等しい．よって，A, B, C それぞれの部屋の数は $67-k$ 個である．

今，$x = k$ であるから，

$$x_1 + \cdots + x_{67-k} = k,\ \ x_i \geqq 0\ (i = 1, \cdots, 67-k)$$

であり，これは k 個をさらに $67-k$ 個の部屋（0 個の部屋があってもよい）に分けて，その分けたものをそれぞれ $x_1, \cdots, x_{67-k}$ の中に入れるということである．y, z についても同様である．

図2

$$\overbrace{\underset{x_1}{\bigcirc}|\underset{x_2}{\bigcirc\bigcirc}|\underset{x_3}{\bigcirc}\cdots\bigcirc|\bigcirc\bigcirc|\underset{x_{67-k}}{\bigcirc}}^{\bigcirc\text{は全部で}k\text{個}}$$

したがって，$67-k$ 個の○と $k-1$ 個の仕切りの並びかえ（$k-1$ 個の仕切りは同じところにいくつ入ってもよい）を考えて，${}_{(67-k-1)+k}\mathrm{C}_k = {}_{66}\mathrm{C}_k$ 通り．

これが 3 つ分であるから，

$$\textbf{r が 3 の倍数のとき，} \boldsymbol{p_r = \frac{\left({}_{66}\mathrm{C}_{\frac{r}{3}}\right)^3}{2^{200}}}$$

である．p_r が最大となるのは，${}_{66}\mathrm{C}_{\frac{r}{3}}$ が最大となるときであり，このときの r の値は

$$\frac{r}{3} = 33 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{r = 99}$$

（ホクソム・安田 亨とその仲間たち）