

6 O を原点とする座標平面上で考える. 0 以上の整数 k に対して, ベクトル \vec{v}_k を

$$\vec{v}_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{3}, \sin \frac{2k\pi}{3} \right)$$

と定める. 投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて, 座標平面上に点 $X_0, X_1, X_2, \dots, X_N$ を以下の規則 (i), (ii) に従って定める.

(i) X_0 は O にある.

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする. X_{n-1} が定まったとし, X_n を次のように定める.

• n 回目のコイン投げで表が出た場合,

$$\vec{OX}_n = \vec{OX}_{n-1} + \vec{v}_k$$

により X_n を定める. ただし, k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする.

• n 回目のコイン投げで裏が出た場合, X_n を X_{n-1} と定める.

(1) $N = 8$ とする. X_8 が O にある確率を求めよ.

(2) $N = 200$ とする. X_{200} が O にあり, かつ, 合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく. ただし $0 \leq r \leq 200$ である. p_r を求めよ. また p_r が最大となる r の値を求めよ. (22 東大・文科)

6 **数学A** 【確率の雑題】 **や** 難

考 **方** 問題文の条件がとても分かりづらいので, まずは整理しよう. k を 3 で割った余りによって \vec{v}_k を分類すると,

$k \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$$\vec{v}_k = (1, 0) \rightarrow \text{右向き}$$

$k \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$\vec{v}_k = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \text{左上向き}$$

$k \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$\vec{v}_k = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rightarrow \text{左下向き}$$

ということであるから, これをもとにまずいくつか実験をしてみる.

例えば, コインを 6 回投げて,

表裏表裏表裏

というように出るとする. はじめはそれまでに出ている裏の数が 0 であるから, 1 回目の表では右向きに進む. 次の裏で進行方向が変わり(進みはしない), 2 回目の表では左上向きに進む. また次の裏で進行方向が変わり(進みはしない), 次の 3 回目の表で左下向きに進んで, 図 01 のような図を描く.

もう 1 つ別の例を考えてみる. コインを 9 回投げて,

表表裏表表裏表裏表

と出るとする. はじめ表が 2 回連続出るので, 右方向に長さ 2 進む. 次の裏で進行方向を変え, 次の 2 連続の表

で左上向きにまた長さ 2 進む. その次は裏が 2 連続で出ているので, 進行方向が 2 回(すなわち, 240 度)変わる. そして, 最後の 2 連続の表でまた右向きに長さ 2 進んで, 図 02 のような図を描く.

つまり, 裏が出る度に進行方向が変わり, その後表が連続して出る分だけ, それぞれの方向に進むということである.

このイメージをもてるかどうか, この問題を解く重要なカギである.

▶解答◀ (1) 8 回すべて裏が出た場合は原点から動かないので X_8 が O にある. 1 度でも表が出た場合に原点に戻ることがあるかどうか調べる.

k を 3 で割った余りによって \vec{v}_k を分類する.

$k \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$$\vec{v}_k = (1, 0)$$

$k \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$\vec{v}_k = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

2

$k \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$\vec{v}_k = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

である。はじめ X_0 が O にある状態で、そのとき動くとする(すなわち、コインの表が出る)ならば、右向きに点が動く($k=0$)。そのまま表が出続ければ、ずっと右に進んでいくが、裏が出ると進む方向が 120° 回転して、表が出ただけ左上に進む。そして、また裏が出たら 120° 回転して、表が出ただけ左下に進む。これをずっと繰り返していく。右向きに進む($k \equiv 0 \pmod{3}$) 進み方を A 、左上に進む($k \equiv 1 \pmod{3}$) 進み方を B 、左下に進む($k \equiv 2 \pmod{3}$) 進み方を C とする。

A, B, C の回数をそれぞれ x, y, z 回とおくと、表が出る回数の合計が $x+y+z$ であり、1回でも表が出て原点に戻るための条件は、

$$x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \text{ かつ } \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$$

を満たすときである。したがって、

$$y = z \text{ かつ } x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0$$

$$x = y = z \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

すなわち、 A, B, C に同じ分ずつ進む(表が同じ数ずつ出る)ということであるから、表が出る回数の合計は3の倍数である。したがって、 $N=8$ の場合、考えられるのは表の出る回数の合計が3, 6のときである。

(ア) 表の出る回数の合計が3のとき。

進む向きに応じて表が出ることを A, B, C 、裏が出ることを \times で表すと、考えられる進み方は以下の通りである。なお、 \times が1つのときには 120° 回転であり、 \times が2個続くと 240° 回転というように、 \times の続く個数によって回転角度が変わることに注意せよ。

- $A \times B \times C \times \times \times$
- $A \times B \times \times \times \times C$
- $A \times \times C \times \times B \times$
- $A \times \times \times B \times C$
- $\times B \times C \times A \times \times$
- $\times B \times \times A \times \times C$
- $\times \times C \times A \times B \times$
- $\times \times \times A \times B \times C$

よって、8通り。

(イ) 表の出る回数の合計が6のとき。考えられる進み方は以下の1通りのみである。

$$AA \times BB \times CC$$

したがって、原点から動かない1通りと合わせて、 X_8 が O にいる確率は、

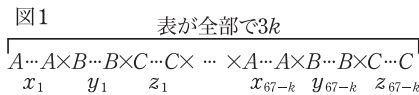
$$\frac{1+8+1}{2^8} = \frac{5}{128}$$

(2) X_{200} が O にあることから、(1)と同様①を満たし、表の出る回数の合計は3の倍数である。表の出る回数の合計が3の倍数でないときには、原点に戻ってくることはできない。したがって、 **r が3の倍数でないとき、 $p_r = 0$** である。

r が3の倍数のとき、 $r = 3k$ ($0 \leq k \leq 66$)とおくと、

$$x = y = z = k$$

である。表が出ることを進む向きに応じて A, B, C 、裏が出ることを \times で表すと、裏が出るごとに進む向きが 120° 回転するので、

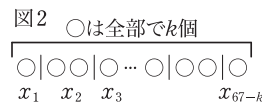


というようになる。このとき、 \times で仕切られた各部屋の中は0個でもよい。 A, B, C がそれぞれ k 個、 \times は全部で $200 - 3k$ 個であることから、 \times で区切られた部屋の数 $201 - 3k = 3(67 - k)$ 個である。今、部屋の中身が空になってもよいと考えているので、部屋の数も A, B, C ですべて等しい。よって、 A, B, C それぞれの部屋数は $67 - k$ 個である。

今、 $x = k$ であるから、

$$x_1 + \dots + x_{67-k} = k, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 67 - k)$$

であり、これは k 個をさらに $67 - k$ 個の部屋(0個の部屋があってもよい)に分けて、その分けたものをそれぞれ x_1, \dots, x_{67-k} の中に入れるということである。 y, z についても同様である。



したがって、 $67 - k$ 個の \bigcirc と $k - 1$ 個の仕切りの並びかえ($k - 1$ 個の仕切りは同じところにいくつ入ってもよい)を考えて、 ${}_{(67-k-1)+k}C_k = {}_{66}C_k$ 通り。

これが3つ分であるから、

$$r \text{ が3の倍数のとき、 } p_r = \frac{\left({}_{66}C_{\frac{r}{3}} \right)^3}{2^{200}}$$

である。 p_r が最大となるのは、 ${}_{66}C_{\frac{r}{3}}$ が最大となるときであり、このときの r の値は

$$\frac{r}{3} = 33 \quad \therefore r = 99$$

(ホクソム・安田 亨とその仲間たち)