東京大学・文科

試験日　年 月 日　時間 分 （出題範囲）

1 k を正の実数とし，2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の 2 つの実数解を α, β とする．k が $k>2$ の範囲を動くとき，$\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ の最小値を求めよ．

2 座標平面上の放物線 $y=3x^2-4x$ を C とおき，直線 $y=2x$ を l とおく．実数 t に対し，C 上の点 $\mathrm{P}(t, 3t^2-4t)$ と l の距離を $f(t)$ とする．

（1） $-1 \leqq a \leqq 2$ の範囲の実数 a に対し，定積分

$$g(a)=\int_{-1}^{a} f(t)\, dt$$

を求めよ．

（2） a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$g(a)-f(a)$ の最大値および最小値を求めよ．

3 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる．ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする．

（1） どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ．

（2） どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ．

4 半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A，B，C，D が

$$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=\mathrm{BC},\ \mathrm{AD}=\mathrm{BD},\ \cos\angle\mathrm{ACB}=\cos\angle\mathrm{ADB}=\frac{4}{5}$$

を満たしているとする．

（1） 三角形 ABC の面積を求めよ．

（2） 四面体 ABCD の体積を求めよ．

1

数学Ⅱ【解と係数の関係】**標 準**

▶解答◀ $k>0$ より $x^2+x-k=0$ は確かに実数解をもつ．解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-k$$

である．このとき，

$$F=\frac{\alpha^3}{1-\beta}+\frac{\beta^3}{1-\alpha}$$

とおくと，

$$F=\frac{\alpha^3(1-\alpha)+\beta^3(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

この分子について

$$\alpha^3(1-\alpha)+\beta^3(1-\beta)$$
$$=(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha^4+\beta^4)$$

ここで，

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=-1-3k$$
$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$$
$$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2$$
$$=(1+2k)^2-2k^2$$
$$=2k^2+4k+1$$

であるから，分子は

$$(-1-3k)-(2k^2+4k+1)$$
$$=-2k^2-7k-2$$

となる．また，分母は

$$(1-\alpha)(1-\beta)$$
$$=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$$
$$=-k+2$$

であるから，

$$F=\frac{-2k^2-7k-2}{-k+2}=\frac{2k^2+7k+2}{k-2}$$
$$=2k+11+\frac{24}{k-2}$$
$$=15+2(k-2)+\frac{24}{k-2}$$

$k>2$ より，相加・相乗平均の不等式を用いると

$$F \geqq 15+2\sqrt{2(k-2)\cdot\frac{24}{k-2}}=15+8\sqrt{3}$$

等号は

$$2(k-2)=\frac{24}{k-2}$$
$$(k-2)^2=12 \qquad \therefore\quad k=2+2\sqrt{3}$$

で成立するから，F の最小値は $\mathbf{15+8\sqrt{3}}$

2 数学Ⅱ【定積分で表された関数】標準

▶解答◀　（1）　P と l の距離は

$$f(t)=\frac{|2t-(3t^2-4t)|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}|-3t^2+6t|=\frac{3}{\sqrt{5}}|t(t-2)|$$

（ア）　$\boldsymbol{-1\leqq a\leqq 0}$ のとき：図 1 を見よ．

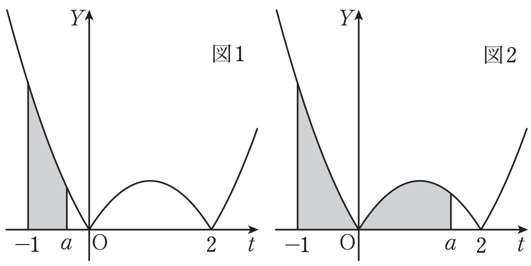
$$g(a)=\int_{-1}^{a}f(t)\,dt$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{a}(t^2-2t)\,dt=\frac{3}{\sqrt{5}}\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{-1}^{a}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\left\{\frac{a^3}{3}-a^2-\left(-\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2+4)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}(a+1)(a-2)^2}$$



（イ）　$\boldsymbol{0\leqq a\leqq 2}$ のとき：図 2 を見よ．

$$g(a)=\int_{-1}^{a}f(t)\,dt$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{0}(t^2-2t)\,dt+\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{0}^{a}(-t^2+2t)\,dt$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{-1}^{0}+\frac{3}{\sqrt{5}}\left[-\frac{t^3}{3}+t^2\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\left\{0-\left(-\frac{1}{3}-1\right)\right\}+\frac{3}{\sqrt{5}}\left(-\frac{a^3}{3}+a^2\right)$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2-4)}$$

（2）　$h(a)=g(a)-f(a)$ とおく．

$$h(a)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2-4)-\frac{3}{\sqrt{5}}(-a^2+2a)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-6a^2+6a-4)$$

$$h'(a)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(3a^2-12a+6)$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{5}}(a^2-4a+2)$$

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$		↘		↗	

$$h(0)=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$h(2)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(8-24+12-4)=\frac{8}{\sqrt{5}}$$

また，$\alpha=2-\sqrt{2}$ とおくと，$\alpha^2-4\alpha+2=0$ であり，

$$a^3-6a^2+6a-4$$

$$=(a^2-4a+2)(a-2)-4a$$

であるから

$$h(\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(0-4\alpha)=\frac{4}{\sqrt{5}}(2-\sqrt{2})$$

よって $h(a)$ は最大値 $\boldsymbol{\frac{8}{\sqrt{5}}}$，最小値 $\boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{5}}(2-\sqrt{2})}$ をとる．

3 数学A【確率の雑題】標準

▶解答◀　黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個の順列は $\frac{12!}{3!4!5!}=3\cdot7\cdot10\cdot11\cdot12$ 通りある．

（1）　黒玉 3 個，白玉 5 個をまず並べる．この順列は $\frac{8!}{3!5!}=8\cdot7$ 通りある．この 8 個の間または端の 9 か所のうち 4 か所に赤玉を入れる組合せは ${}_9\mathrm{C}_4=3\cdot7\cdot6$ 通りある．

∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨

よって求める確率は

$$p=\frac{8\cdot7\cdot3\cdot7\cdot6}{3\cdot7\cdot10\cdot11\cdot12}=\boldsymbol{\frac{14}{55}}$$

（2）　白玉をまず並べ（1 通り），そこで赤玉をどのように入れるかで場合分けする．

（ア）　1 か所に赤玉を 4 つとも入れる場合

（イ）　2 か所に赤玉 4 つを分けて入れる場合

（ウ）　3 か所に赤玉 4 つを分けて入れる場合

（エ）　4 か所に赤玉を 1 つずつ入れる場合

以下，図中では白玉を W，赤玉を R，黒玉を B と書いている．

∨Ⓦ∨Ⓦ∨Ⓦ∨Ⓦ∨Ⓦ∨

（ア）　1 か所に赤玉を 4 つとも入れる場合

赤玉を並べる場所を 1 か所選び（6 通り），そこに赤玉 4 つを入れる．赤玉は隣り合ってはいけないので，赤玉 4 つの間に 1 つずつ黒玉を入れる（1 通り）．したがって

$$6\cdot1=6\ (\text{通り})$$

（イ）　2 か所に赤玉 4 つを分けて入れる場合

赤玉を並べる場所を 2 か所選び（${}_6\mathrm{C}_2$ 通り），そこに赤玉 4 つを入れる．

（イ −1）　赤玉 1 つと赤玉 3 つに分けて入れる

赤玉は隣り合ってはいけないので，赤玉 3 つの間に黒玉が 2 つ入り，残り 1 つは他の黒玉と隣り合わなければ

どこでもよい (8 通り). 赤玉 1 つと 3 つの 2 グループを 2 か所のうちどちらに並べるかで 2 通りある.

∨W∨W∨W∨W∨RBRBR∨W∨W∨

(イ −2)　赤玉を 2 つずつに分けて入れる

赤玉は隣り合ってはいけないので, 赤玉 2 つの間に黒玉が 1 つ入るのが 2 組あり, 残り 1 つは他の黒玉と隣り合わなければどこでもよい (8 通り).

∨W∨RBR∨W∨W∨RBR∨W∨W∨

したがって

$${}_6C_2\cdot(8\cdot2+8)=360\ (\text{通り})$$

(ウ)　3 か所に赤玉 4 つを分けて入れる場合

赤玉を並べる場所を 3 か所選び (${}_6C_3$ 通り), そこに赤玉を 1 つ, 1 つ, 2 つに分けて入れる. 赤玉 2 つの間に黒玉が 1 つ入るが, 残り 2 つは黒玉同士で隣り合わなければどこでもよい (${}_9C_2$ 通り). 赤玉 1 つ, 1 つ, 2 つの 3 グループを 3 ヶ所のうちどこに並べるかで 3 通りある.

∨W∨R∨W∨R∨W∨W∨RBR∨W∨

したがって

$${}_6C_3\cdot{}_9C_2\cdot3=2160\ (\text{通り})$$

(エ)　4 か所に赤玉を 1 つずつ入れる場合

赤玉を並べる場所を 4 か所選び (${}_6C_4$ 通り), そこに 1 つずつ赤玉を入れ, 隣り合わないように黒玉を入れる (${}_{10}C_3$ 通り).

∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨

したがって

$${}_6C_4\cdot{}_{10}C_3=1800\ (\text{通り})$$

(ア)〜(エ) より

$$q=\frac{6+360+2160+1800}{\dfrac{12!}{5!4!3!}}\cdot\frac{\dfrac{12!}{5!4!3!}}{56\cdot{}_9C_4}=\mathbf{\frac{103}{168}}$$

4

数学A【空間図形】**標 準**

▶解答◀　(1)　$\angle ACB=C$, AB の中点を M とおく.

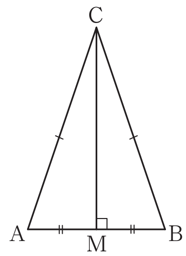
$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}}=\frac{1}{3}$$

$\dfrac{AM}{CM}=\tan\dfrac{C}{2}$ であるから,

$$CM=\frac{1}{2}\cdot3=\frac{3}{2}$$

よって, 三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$



(2)　△ABC と △ABD は, 辺 AB を共有し, $\angle ACB=\angle ADB$ であるから, △ABC ≡ △ABD である. よって, $CM=DM=\dfrac{3}{2}$ である.

球の中心を O とする. $OA=OB=AB=1$ より, △OAB は正三角形で, $OM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である.

$\angle OMC=\theta$ とおく. △OMC において余弦定理より,

$$\cos\theta=\frac{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}-1}{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{16}{27}}=\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}$$

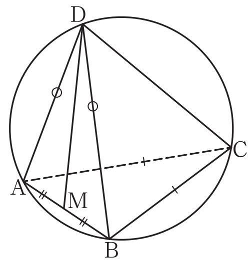
対称性より, 点 O は △DMC 上にあり, 直線 OM は $\angle DMC$ を 2 等分するから, $\angle DMC=2\theta$ である.

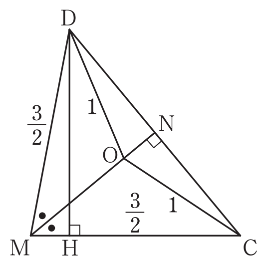
$$DH=\frac{3}{2}\sin2\theta=3\sin\theta\cos\theta$$

$$=3\cdot\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{11}}{9}$$

よって, 四面体 ABCD の体積は

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4\sqrt{11}}{9}\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{\sqrt{11}}{9}}$$





♦別解♦　(2)　CD の中点を N とする. $MN=h$ とおく. 直角三角形 MND および直角三角形 OND で三平方の定理より

$$ND^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-h^2=1^2-\left(h-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\frac{9}{4}-h^2=1-\left(h^2-\sqrt{3}h+\frac{3}{4}\right)$$

$$\sqrt{3}h=2\qquad\therefore\quad h=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$ND=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{11}{12}}=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{33}}{6}$$

$$\mathrm{CD} = 2\mathrm{ND} = \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$\triangle\mathrm{CMD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{33}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

平面 CHD と AB は垂直であることから，四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{CMD}\cdot\mathrm{AB} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{3}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{9}}$$

要の分析　**1**，**2**，**4** は落とせない．差がつくとしたら **3**（2）である．理系に力作をおいた結果，文系数学は教授陣も疲れてしまったのかもしれない

（椎茸，Sakura）