東京大学・理科

試験日　年 月 日　時間 分 （出題範囲）

1 （1） 正の整数 k に対し，

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \left|\sin(x^2)\right| dx$$

とおく．次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

（2） 正の整数 n に対し，

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} \left|\sin(x^2)\right| dx$$

とおく．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ．

2 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる．ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする．

（1） どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ．

（2） どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ．

3 a を実数とし，座標平面上の点 $(0, a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする．

（1） C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ．

（2） a は（1）で求めた範囲にあるとする．C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする．S 上の点 P に対し，点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_{P} とする．$L_{\mathrm{Q}} = L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q，R が存在するような a の範囲を求めよ．

4 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(1, 1, 1), C(1, 2, 3) を考える．

（1） $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ．

（2） 点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

（3） 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える．S が三角形 OHB と共有点を持つような r の範囲を求めよ．ただし，三角形 OHB は 3 点 O，H，B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする．

5 整式 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を考える．

（1） $g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく．$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ．

（2） a, b を実数とし，$h(x) = x^2 + ax + b$ とおく．$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく．$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ．

6 O を原点とする座標空間において，不等式 $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$ を表す立方体を考える．その立方体の表面のうち，$z < 1$ を満たす部分を S とする．

以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める．

（1） 座標空間内の点 P が次の条件（i），（ii）をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ．

（i） $\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$

（ii） 線分 OP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ．

（2） 座標空間内の点 N と点 P が次の条件（iii），（iv），（v）をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ．必要ならば，$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい．

（iii） $\mathrm{ON} + \mathrm{NP} \leqq \sqrt{3}$

（iv） 線分 ON と S は共有点を持たない．

（ｖ） 線分 NP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点に持つ．

1

数学Ⅲ【定積分と不等式】やゝ難

▶解答◀ （１） $x^2=t$ とおくと，いま積分区間は正であるから，$x=\sqrt{t}$ である．$dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$

x	$\sqrt{k\pi}\ \to\ \sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi\ \to\ (k+1)\pi$

$$A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

さらに $u=t-k\pi$ とおくと，$du=dt$ で

t	$k\pi\ \to\ (k+1)\pi$
u	$0\ \to\ \pi$

$$A_k=\int_0^{\pi}|\sin(u+k\pi)|\frac{du}{2\sqrt{u+k\pi}}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{|\sin u|}{2\sqrt{u+k\pi}}\,du=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u+k\pi}}\,du$$

これより

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_0^{\pi}\sin u\,du\leqq A_k$$

$$\leqq\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^{\pi}\sin u\,du$$

であり，

$$\int_0^{\pi}\sin u\,du=\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi}=2$$

も合わせると，

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

（２） $B_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}|\sin(x^2)|\,dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}A_k$$

であるから，（１）より

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq B_n\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\geqq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\leqq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

であるから，① の左辺は

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}$$

$$\geqq\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=n}^{2n-1}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1})$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$\to\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)\quad(n\to\infty)$$

① の右辺は

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

$$\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=n}^{2n-1}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n-1})$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2-\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

$$\to\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)\quad(n\to\infty)$$

よってハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)}$$

◆別解◆ 【区分求積法】

① の左辺は

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^2$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)\quad(n\to\infty)$$

① の右辺は

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^2$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)\quad(n\to\infty)$$

となるから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)}$$

2

数学A【確率の雑題】標準

▶解答◀ 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個の順列は $\dfrac{12!}{3!4!5!}=3\cdot7\cdot10\cdot11\cdot12$ 通りある．

（１） 黒玉 3 個，白玉 5 個をまず並べる．この順列は $\dfrac{8!}{3!5!}=8\cdot7$ 通りある．この 8 個の間または端の 9 か所

のうち4か所に赤玉を入れる組合せは ${}_9\mathrm{C}_4=3\cdot7\cdot6$ 通りある．

∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨

よって求める確率は

$$p=\frac{8\cdot7\cdot3\cdot7\cdot6}{3\cdot7\cdot10\cdot11\cdot12}=\mathbf{\frac{14}{55}}$$

(2)　白玉をまず並べ (1通り)，そこで赤玉をどのように入れるかで場合分けする．

（ア）　1か所に赤玉を4つとも入れる場合

（イ）　2か所に赤玉4つを分けて入れる場合

（ウ）　3か所に赤玉4つを分けて入れる場合

（エ）　4か所に赤玉を1つずつ入れる場合

以下，図中では白玉を W，赤玉を R，黒玉を B と書いている．

∨Ⓦ∨Ⓦ∨Ⓦ∨Ⓦ∨Ⓦ∨

（ア）　1か所に赤玉を4つとも入れる場合

赤玉を並べる場所を1か所選び (6通り)，そこに赤玉4つを入れる．赤玉は隣り合ってはいけないので，赤玉4つの間に1つずつ黒玉を入れる (1通り)．したがって

$$6\cdot1=6\ (\text{通り})$$

（イ）　2か所に赤玉4つを分けて入れる場合

赤玉を並べる場所を2か所選び (${}_6\mathrm{C}_2$ 通り)，そこに赤玉4つを入れる．

(イ−1)　赤玉1つと赤玉3つに分けて入れる

赤玉は隣り合ってはいけないので，赤玉3つの間に黒玉が2つ入り，残り1つは他の黒玉と隣り合わなければどこでもよい (8通り)．赤玉1つと3つの2グループを2か所のうちどちらに並べるかで2通りある．

∨Ⓡ∨Ⓦ∨Ⓦ∨Ⓦ∨(RBRBR)∨Ⓦ∨Ⓦ∨

(イ−2)　赤玉を2つずつに分けて入れる

赤玉は隣り合ってはいけないので，赤玉2つの間に黒玉が1つ入るのが2組あり，残り1つは他の黒玉と隣り合わなければどこでもよい (8通り)．

∨Ⓦ∨(RBR)∨Ⓦ∨Ⓦ∨(RBR)∨Ⓦ∨Ⓦ∨

したがって

$${}_6\mathrm{C}_2\cdot(8\cdot2+8)=360\ (\text{通り})$$

（ウ）　3か所に赤玉4つを分けて入れる場合

赤玉を並べる場所を3か所選び (${}_6\mathrm{C}_3$ 通り)，そこに赤玉を1つ，1つ，2つに分けて入れる．赤玉2つの間に黒玉が1つ入るが，残り2つは黒玉同士で隣り合わなければどこでもよい (${}_9\mathrm{C}_2$ 通り)．赤玉1つ，1つ，2つの3グループを3ヶ所のうちどこに並べるかで3通りある．

∨Ⓦ∨Ⓡ∨Ⓦ∨Ⓡ∨Ⓦ∨Ⓦ∨(RBR)∨Ⓦ∨

したがって

$${}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_9\mathrm{C}_2\cdot3=2160\ (\text{通り})$$

（エ）　4か所に赤玉を1つずつ入れる場合

赤玉を並べる場所を4か所選び (${}_6\mathrm{C}_4$ 通り)，そこに1つずつ赤玉を入れ，隣り合わないように黒玉を入れる (${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り)．

∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨

したがって

$${}_6\mathrm{C}_4\cdot{}_{10}\mathrm{C}_3=1800\ (\text{通り})$$

(ア)〜(エ) より

$$q=\frac{6+360+2160+1800}{\dfrac{12!}{5!4!3!}}\cdot\frac{\dfrac{12!}{5!4!3!}}{56\cdot{}_9\mathrm{C}_4}=\mathbf{\frac{103}{168}}$$

3　数学Ⅱ【最大値・最小値】やや難

▶解答◀　**(1)**　a は明らかに正である．$x^2+(y-a)^2=1$ と $y=x^2$ から x^2 を消去して

$$y+(y-a)^2=1$$

$$y^2-(2a-1)y+(a^2-1)=0$$

これが $a-1<y<a+1$ の範囲に解をもたない条件を考える．この左辺を $f(y)$ とおいたとき，$f(y)$ の軸は $\frac{2a-1}{2}=a-\frac{1}{2}$ であるから，必ず $a-1<y<a+1$ の範囲に含まれる．ゆえに，求める条件は $f(y)=0$ の判別式を D としたとき $D<0$ であるから

$$D=(2a-1)^2-4(a^2-1)$$

$$=-4a+5<0$$

よって $\boldsymbol{a>\frac{5}{4}}$ である．

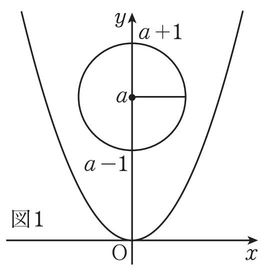


図1

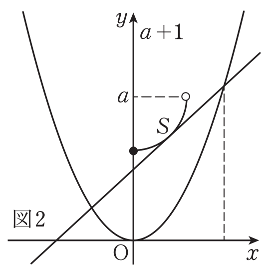


図2

(2)　S 上の点 P を $(\cos\theta, a+\sin\theta)\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta<0\right)$ とおく．P における接線は

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)(y-a)=1 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

である．これと $y=x^2$ を連立して

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)(x^2-a)=1$$

$$(\sin\theta)x^2+(\cos\theta)x-(a\sin\theta+1)=0$$

この解を α, β とすると，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{\tan\theta},\ \alpha\beta=-a-\frac{1}{\sin\theta}$$

である．① の傾きが $-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\dfrac{1}{\tan\theta}$ であることから，$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ も合わせると

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{P}}&=\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}}\,|\alpha-\beta|\\&=\left|\frac{1}{\sin\theta}\right||\alpha-\beta|\end{aligned}$$

となる．このとき

$$\begin{aligned}{L_{\mathrm{P}}}^2&=\frac{1}{\sin^2\theta}(\alpha-\beta)^2\\&=\frac{1}{\sin^2\theta}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\\&=\frac{1}{\sin^2\theta}\left\{\frac{1}{\tan^2\theta}-4\left(-a-\frac{1}{\sin\theta}\right)\right\}\end{aligned}$$

$s=\dfrac{1}{\sin\theta}$ とおくと $s\leqq-1$ で，s の値と S 上の点は 1 対 1 に対応する．

$$\begin{aligned}{L_{\mathrm{P}}}^2&=s^2\{(s^2-1)-4(-a-s)\}\\&=s^2\{s^2+4s+(4a-1)\}\end{aligned}$$

これを $g(s)$ とおくと

$$\begin{aligned}g'(s)&=2s\{s^2+4s+(4a-1)\}+s^2(2s+4)\\&=2s\{2s^2+6s+(4a-1)\}\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}h(s)&=2s^2+6s+(4a-1)\\&=2\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+4a-\frac{11}{2}\end{aligned}$$

とおく．$L_{\mathrm{Q}}=L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q，R が存在するための必要十分条件は，ある定数 c に対して，$g(s)=c$ という方程式が $s\leqq-1$ に異なる解をもつことであり，それは $g(s)$ が $s\leqq-1$ において単調でないことである．ゆえに，求める条件は $g(s)$ が $s\leqq-1$ のある点において符号変化する，すなわち，$h(s)=0$ が $s\leqq-1$ の範囲に解をもつことであるから，$h(s)$ の軸が $s=-\dfrac{3}{2}$ であることも合わせると

$$h\left(-\frac{3}{2}\right)=4a-\frac{11}{2}<0 \qquad \therefore\quad a<\frac{11}{8}$$

よって，（1）と合わせて $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{11}{8}}$ である．

4 数学B【ベクトルと図形（空間）】標準

▶解答◀ （1） $\mathrm{P}(a, b, c)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2a=0 \qquad \therefore\quad a=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a+b+c=0 \qquad \therefore\quad c=-b$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=a+2b+3c=1$$

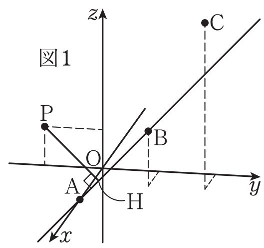
$$2b-3b=1 \qquad \therefore\quad b=-1$$

よって，P の座標は $\boldsymbol{(0, -1, 1)}$ となる．このとき，OP と平面 OAB は垂直となり，$\mathrm{OP}=\sqrt{2}$ となっている．

（2） $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$（$k$ は実数）とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=k(-1, 1, 1)-(-2, -1, 1)\\&=(2-k, 1+k, -1+k)\end{aligned}$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ であるから

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}\\&=-(2-k)+(1+k)+(-1+k)=0\end{aligned}$$

$$3k-2=0 \qquad \therefore\quad k=\frac{2}{3}$$

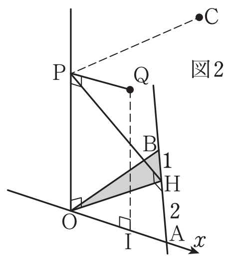
したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}=\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

（3） $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{3}{2}, -1, 1\right)$

である．また，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OA}=2$ である．



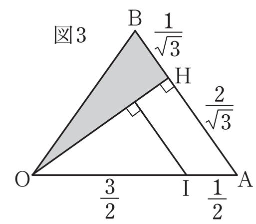


図 2 を見よ．Q から OA に下ろした垂線の足を I とすると，四角形 POIQ は長方形だから $\mathrm{OI}=\dfrac{3}{4}\mathrm{OA}=\dfrac{3}{2}$ となる．ここで，△OHB 内の点 R に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=\sqrt{\mathrm{QI}^2+\mathrm{IR}^2}\\&=\sqrt{\mathrm{OP}^2+\mathrm{IR}^2}=\sqrt{\mathrm{IR}^2+2}\end{aligned}$$

となるから，IR の最大値・最小値を考える．図 3 を見よ．IR の最小値は，I から OH に垂線を下ろしたとき

で，その長さは $\frac{3}{4}\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である．最大値は IO か IB となる．$\mathrm{IO}=\frac{3}{2}$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{IB}}=(1,1,1)-\left(\frac{3}{2},0,0\right)=\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$$

$$\mathrm{IB}=\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}=\frac{3}{2}$$

であるから，いずれにしても最大値は $\frac{3}{2}$ である．よって，共有点をもつような r の範囲は

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2}\leqq r\leqq\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2}$$

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}\leqq r\leqq\frac{\sqrt{17}}{2}}$$

5 数学Ⅱ【多項式の除法】標準

▶解答◀（1） $g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $q(x)$ とおくと

$$g(x)=q(x)f(x)+r(x)$$

このとき

$$g(x)^7=(q(x)f(x)+r(x))^7$$
$$=f(x)\sum_{k=1}^{7}{}_7\mathrm{C}_k q(x)^k f(x)^{k-1}r(x)^{7-k}+r(x)^7$$

であるから，$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りは等しい．

（2）（1）において $g(x)=h(x)^7$ として適用すると，$\left(h(x)^7\right)^7=h(x)^{49}$ を $f(x)$ で割った余りが $h_2(x)$ となる．$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるとき，商を $Q(x)$ とおくと

$$h(x)^{49}=Q(x)f(x)+h(x)$$

$$h(x)\left(h(x)^{48}-1\right)=Q(x)f(x)\quad\cdots\cdots①$$

① の両辺で $x=1$ とすると，$f(1)=0$ より

$$(1+a+b)\{(1+a+b)^{48}-1\}=0$$

$$1+a+b=0,\ \pm1\quad\cdots\cdots②$$

① の両辺で $x=2$ とすると

$$(4+2a+b)\{(4+2a+b)^{48}-1\}=0$$

$$4+2a+b=0,\ \pm1\quad\cdots\cdots③$$

① の両辺を x で微分すると

$$h'(x)\left(h(x)^{48}-1\right)+h(x)\cdot48h(x)^{47}h'(x)$$
$$=Q'(x)f(x)+Q(x)f'(x)$$

$$h'(x)\left(49h(x)^{48}-1\right)$$
$$=Q'(x)f(x)+Q(x)f'(x)\quad\cdots\cdots④$$

② より $h(1)=0,\pm1$ であるから

$$49h(1)^{48}-1\neq0$$

$$2\cdot1+a=0\qquad\therefore\quad a=-2$$

② に代入すると $b=0,1,2$

③ に代入すると $b=0,\pm1$

よって $(a,b)=(-2,0),(-2,1)$ が必要である．

$h_2(x)=px^2+qx+r$ とおくと

$$h(x)^{49}=Q(x)f(x)+px^2+qx+r\quad\cdots\cdots⑤$$

x で微分して

$$49h(x)h'(x)=Q'(x)f(x)+Q(x)f'(x)$$
$$+2px+q\quad\cdots\cdots⑥$$

となる．

（ア） $(a,b)=(-2,0)$ のとき

$$h(x)=x^2-2x=x(x-2)$$

$$h'(x)=2x-2=2(x-1)$$

⑤ で $x=1$ とすると

$$-1=p+q+r$$

⑤ で $x=2$ とすると

$$0=4p+2q+r$$

⑥ で $x=1$ とすると

$$0=2p+q$$

ゆえに $(p,q,r)=(1,-2,0)$ となるから $h_2(x)=h(x)$ となる．

（イ） $(a,b)=(-2,1)$ のとき

$$h(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

$$h'(x)=2(x-1)$$

⑤ で $x=1$ とすると

$$0=p+q+r$$

⑤ で $x=2$ とすると

$$1=4p+2q+r$$

⑥ で $x=1$ とすると

$$0=2p+q$$

ゆえに $(p,q,r)=(1,-2,1)$ となるから $h_2(x)=h(x)$ となる．

よって $(a,b)=\boldsymbol{(-2,0),(-2,1)}$

6 数学Ⅲ【体積】難！

▶解答◀（1） 立方体の頂点を図のようにおく．O と立方体の各面の 4 頂点を結ぶことによって，立方体は 6 つの合同な正四角錐に分けられる．正四角錐の底面を外し，どこまでも伸びる四角錐のようなものを考える．例えば，正四角錐 O-ABCD の底面を外し，半直線 OA，OB，OC，OD で囲まれたどこまでも伸びる四

角錐のようなものを半四角錐 O-ABCD と呼ぶことにしよう．

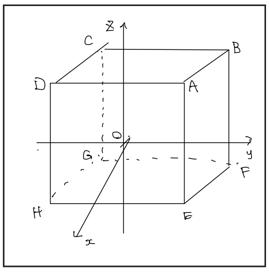
P を半四角錐 O-AEBF の内部の点とする．このとき，正四角錐 O-AEBF の表面および内部の点は条件（ i ），（ ii ）をともに満たす．正四角錐 O-AEBF の外部の点は条件（ ii ）を満たさない．ゆえに，半四角錐 O-AEBF の内部の点で条件（ i ），（ ii ）をともに満たす点 P の動きうる範囲は，正四角錐 O-AEBF であり，その体積は立方体の $\frac{1}{6}$ であるから，$\frac{1}{6}\cdot 2^3 = \frac{4}{3}$ である．

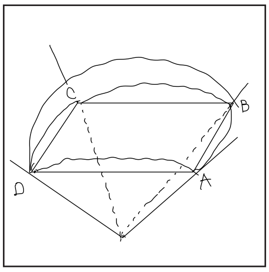
P を半四角錐 O-BFGC, O-CGHD, O-DHEA, O-EFGH の内部の点とするときもそれぞれ同様に $\frac{4}{3}$ ずつである．

P を半四角錐 O-ABCD の内部の点とする．このとき，条件（ ii ）は満たされるから，原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の球の内部と半四角錐 O-ABCD の内部の共通部分を考える．ここで，O と立方体の各面の 4 頂点を半直線で結ぶことによってできる半四角錐は球を 6 つの合同な立体に分けるから，半四角錐 O-ABCD の内部の点で条件（ i ），（ ii ）をともに満たす点 P の動きうる範囲の体積は球の $\frac{1}{6}$ であるから，$\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ である．

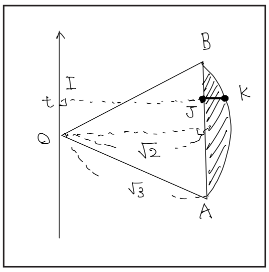
以上より，点 P が動きうる範囲 V の体積は

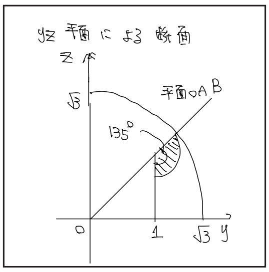
$$5\cdot\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{2}{3}(10+\sqrt{3}\pi)}$$





（**2**） N を線分 OP 上に取れば，（ 1 ）と同じ状況になるから P が V 内にあるとき（iii）から（ v ）を全て満たす．特に，$V \subset W$ であるから，$\overline{V}\cap W$ の部分について考えたい．すなわち，P が V をはみ出るのはどのようなときかを考える．





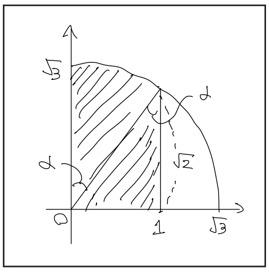
N を半四角錐 O-ABCD の内部でさらに平面 OAB 上にあるとする．特に N を AB 上の点としたとき，P を平面 OAB 内かつ △OAB の外側に固定すると，P の動ける範囲は図の網目部分である．（iii）を満たすように P の固定を外すと P の存在領域は網目部分を AB を軸に 1 回転したものとなる．このうち，$\overline{V}\cap W$ の部分を考えると，それは網目部分を AB を軸に 135° だけ回転したものとなる．図のように座標を入れると，

$$\mathrm{IK}=\sqrt{3-t^2},\ \mathrm{IJ}=\sqrt{2}$$
$$\mathrm{JK}=\sqrt{3-t^2}-\sqrt{2}$$

であるから N を AB 上に固定したときの $\overline{V}\cap W$ の部分の体積は，対称性から

$$\begin{aligned}
&2\pi\int_0^1 \mathrm{JK}^2\,dt\cdot\frac{135^\circ}{360^\circ}\\
&=\frac{3}{4}\pi\int_0^1\left(5-t^2-2\sqrt{2}\sqrt{3-t^2}\right)dt\\
&=\frac{3}{4}\pi\left\{\left[\,5t-\frac{t^3}{3}\,\right]_0^1\right.\\
&\qquad\left.-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2\alpha+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\right)\right\}\\
&=\frac{3}{4}\pi\left(\frac{14}{3}-\sqrt{2}(3\alpha+\sqrt{2})\right)\\
&=\left(2-\frac{9\sqrt{2}}{4}\alpha\right)\pi
\end{aligned}$$

なお，$\int_0^1\sqrt{3-t^2}$ の積分は，図の網目部分の面積として求めた．



N が BC，CD，DA 上にあるときも同様であるから，$\overline{V}\cap W$ の部分の体積は

$$4\cdot\left(2-\frac{9\sqrt{2}}{4}\alpha\right)\pi=(8-9\sqrt{2}\alpha)\pi$$

よって，W の体積は

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}(10+\sqrt{3}\pi)+(8-9\sqrt{2}\alpha)\pi\\
&=\boldsymbol{\frac{20}{3}+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+8-9\sqrt{2}\alpha\right)\pi}
\end{aligned}$$

要の分析　解きやすいはずの **1** がなかなか難しく，意地悪な配置である．**2**，**4**，**5** はそれほど難しくないからここで点をしっかりとって，**3** や **6** に果敢にアタック！

（椎茸，Sakura）