東京女子医科大学

試験日　2018 年 1 月 25 日　時間 60 分　数学I 数学II 数学III 数学A 数学B（数列，ベクトル）

1 実数を係数とする関数 $f(x)=-x^2+ax+1$，$g(x)=ax^3+2x^2+ax-3\,(a<0)$ に対して，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $b \neq c$ として $x=b$ で交点をもち，$x=c$ で接するとする．

（１） $a,\ b,\ c$ を求めよ．

（２） $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

2 中心が $(2,3)$ である半径 1 の円に対して，この円周上の動点を A とし，点 $(-3,4)$ を B とする．このとき，O を原点としてベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積が最大になるときの A の座標を求めよ．

3 xy 平面上の原点を O とし，点 A_0 を x 軸上にとる．このとき，OA_1 を斜辺とし $\angle\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1$ を直角とする直角三角形 $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1$ を T_1 と表す．OA_2 を斜辺とし $\angle\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$ を直角とする直角三角形 $\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$ を T_2 と表す．このようにして OA_n を斜辺とし $\angle\mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ を直角とする直角三角形 $\mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ を T_n と表す．また，OA_0 の長さと $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$ の長さをそれぞれ $a_0,\ a_1$ と表す．

（１） $T_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ がすべて相似のとき，T_1 から T_n までの面積の和 $f(n)$ を $a_0,\ a_1$ を用いて表せ．

（２） $a_0=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a_1$ とする．このとき，$f(m) \geqq 100f(1)$ を満たす最小の自然数 m を求めよ．必要なら次の値を用いても良い．$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}5=0.6990$.

4 x の 2 次方程式 $nx^2+3x-9=0$ が整数解をもつとき正の整数 n をすべて求めよ．

1

数学II【面積】標 準

▶解答◀ （１） 2 曲線が $x=c$ で接する条件は

$$f(c)=g(c),\ f'(c)=g'(c)$$

$$-c^2+ac+1=ac^3+2c^2+ac-3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$-2c+a=3ac^2+4c+a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

② より $ac^2+2c=0$ となる．c を掛けて $ac^3+2c^2=0$ となる．これを ① に代入し $c^2=4$ を得る．

$c=\pm2$ である．$c \neq 0$ であるから $ac^2+2c=0$ より $ac+2=0$ となり，$a<0$ より，$c=\mathbf{2}$，$a=\mathbf{-1}$ である．

$$f(x)=-x^2-x+1,\ g(x)=-x^3+2x^2-x-3$$

となる．

$$f(x)-g(x)=x^3-3x^2+4=(x-2)^2(x+1)$$

である．方程式 $f(x)=g(x),\ x \neq c$ の解が b であり，$b=\mathbf{-1}$ である．

（２） 求める面積を S とする．12 分の 1 公式を用いれば

$$S=\int_{-1}^{2}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{12}\{2-(-1)\}^4=\mathbf{\frac{27}{4}}$$

となる．本学の形式は答えの欄に答えの数値を記入するだけである．有名公式だから，入試ではパッと書くことをお勧めする．計算を続けるなら，

$$S=\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^2\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\{(x-2)+3\}(x-2)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-2)^4}{4}+(x-2)^3\right]_{-1}^{2}$$

$$=-\frac{(-1-2)^4}{4}-(-1-2)^3$$

$$=\frac{1}{4}(-3^4+4\cdot3^3)=\mathbf{\frac{27}{4}}$$

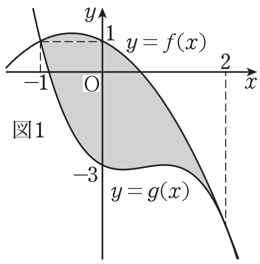


図1

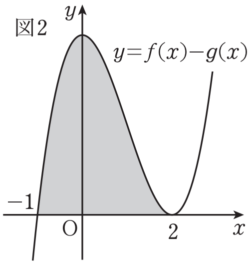


図2

注 意 **【差のグラフを描く】**

曲線をそのまま描けば上左図になる．しかし，グニャグニャ曲がったものを試験場で描くのは，あまり実戦的ではない．正確に描いたら，どう曲がっているのかも怪しい．どうしてもグラフを描きたいなら，差のグラフ（ここでは引いた物の意味）を描く．差のグラフと x 軸の間の面積を求めればよい．曲線 $y=f(x)-g(x)$ は上右図のようになる．

2

数学B【平面ベクトルの内積】標 準

▶解答◀ 円の中心を $\mathrm{C}(2,3)$ とおく．

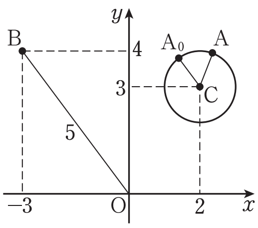
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は成分を使って計算する．また，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を t とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\cdot(-3)+3\cdot4+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos t$$

$$=6+1\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2}\cos t=6+5\cos t$$



これが最大となるのは $t=0$ のときである．それは $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が同じ向きのとき（図の A_0 のとき）である．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{5}(-3,\ 4)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,\ 3)+\frac{1}{5}(-3,\ 4)$$

求める点 A の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{7}{5},\ \frac{19}{5}}\right)$ である．

♦別解♦　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2+\cos\theta,\ 3+\sin\theta)\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおけて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2+\cos\theta)\cdot(-3)+(3+\sin\theta)\cdot4$$

$$=-3\cos\theta+4\sin\theta+6$$

$$=5\cos(\theta-\alpha)+6$$

と合成できる．ただし

$$\cos\alpha=\frac{-3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5},\ 0<\alpha<2\pi$$

とする．α は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の偏角である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\theta=\alpha$ で最大となる．そのとき A は

$$(2+\cos\alpha,\ 3+\sin\alpha)=\left(2+\frac{-3}{5},\ 3+\frac{4}{5}\right)$$

$$=\left(\boldsymbol{\frac{7}{5},\ \frac{19}{5}}\right)$$

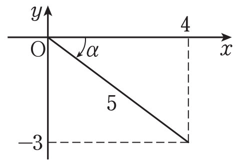
最大・最小問題で合成をするなら，コスの合成の方がサインの合成より適している．最初の解法と，コスの合成は，実際には同じものである．表現方法が違うだけで，底を流れる心は同じである．コスの合成を教えるべきである．

サインの合成でやるなら，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4\sin\theta-3\cos\theta+6$$

$$=5\sin(\theta+\alpha)+6$$

と合成できる．ただし α は $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ を満たす角とする．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が最大となるのは，$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ のときである．このとき $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ は $0<\theta<2\pi$ を満たし，

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

$$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

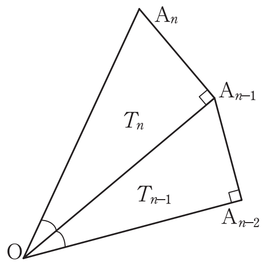
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(2-\frac{3}{5},\ 3+\frac{4}{5}\right)$$

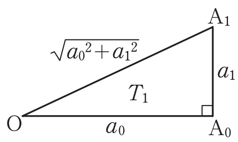
よって，求める点 A の座標は $\left(\boldsymbol{\frac{7}{5},\ \frac{19}{5}}\right)$ である．サインの合成で行うと，このように $\frac{\pi}{2}$ や符号のズレが起こる．効率的な解法でないことが分かる．

3　数学B【等比数列】標 準

▶解答◀　（**1**）　$\triangle\mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ と $\triangle\mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ は相似であり，相似比は

$\dfrac{\mathrm{OA}_1}{\mathrm{OA}_0}=\dfrac{\sqrt{{a_0}^2+{a_1}^2}}{a_0}$ である．この値を r とおく．





数列 $\{T_n\}$ は，初項 $T_1=\frac{1}{2}a_0a_1$，公比 r^2 の等比数列である．よって，

$$f(n)=\frac{T_1(r^{2n}-1)}{r^2-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}a_0a_1\left\{\left(\frac{{a_0}^2+{a_1}^2}{{a_0}^2}\right)^n-1\right\}}{\frac{{a_0}^2+{a_1}^2}{{a_0}^2}-1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{{a_0}^3}{2a_1}\left\{\left(1+\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2}\right)^n-1\right\}}$$

（**2**）　$a_0=\frac{\sqrt{5}}{2}a_1$ より $1+\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2}=1+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{5}$

$f(m)\geqq100f(1)$ より

$$\frac{{a_0}^3}{2a_1}\left\{\left(\frac{9}{5}\right)^m-1\right\}\geqq100\cdot\frac{{a_0}^3}{2a_1}\left\{\left(\frac{9}{5}\right)^1-1\right\}$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^m-1\geqq\frac{100\cdot4}{5}$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^m\geqq81$$

両辺の常用対数をとって

$$m(2\log_{10}3-\log_{10}5)\geqq4\log_{10}3$$

$$m \geqq \frac{4\log_{10}3}{2\log_{10}3-\log_{10}5}$$
$$= \frac{4\cdot 0.4771}{2\cdot 0.4771-0.6990}$$
$$= \frac{19084}{2552} = 7.4\cdots$$

よって，求める自然数は $\boldsymbol{m=8}$

注意 大学から送られてきた問題文には，「T_1 と表す.」の後に「原点 O と」という文言が入っていたが，意味不明であり，校正ミスと考えられるから，削除した.

4 数学A【不定方程式】標準

考え方 「整数係数の多項式が 0 になるという形の方程式が整数解をもつ場合には，整数解は定数項の約数である」というのは有名な事実である.

▶解答◀ 整数解を m とすると

$$nm^2+3m-9=0$$
$$m(nm+3)=9$$

m, $nm+3$ は整数だから m は 9 の約数である．よって，$m=\pm1, \pm3, \pm9$ のいずれかである．n について解くと $n=\dfrac{9-3m}{m^2}$ となる．$f(m)=\dfrac{9-3m}{m^2}$ とおく.

$$f(-1)=12,\ f(1)=6$$
$$f(-3)=\frac{18}{9}=2,\ f(3)=0$$
$$f(-9)=\frac{36}{81}=\frac{4}{9},\ f(9)=\frac{-18}{81}=-\frac{2}{9}$$

n は正の整数であるから，$\boldsymbol{n=2, 6, 12}$

◆別解◆ 2 次方程式を解く人も多いだろう．$n\geqq 1$ であることに注意する.

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+36n}}{2n} \quad \cdots\cdots①$$

$N=\sqrt{9+36n}$ とおく．N は $\sqrt{45}$ 以上の正の整数であるから 7 以上の正の整数である．通常は

$$N^2=9+36n \quad \cdots\cdots②$$

から因数分解して $(N-3)(N+3)=36n$ にすることも多いが，今は，なんともならない．② より $n=\dfrac{N^2-9}{36}$ となり，① に代入すると

$$x=\frac{-3\pm N}{\frac{N^2-9}{18}}$$

複号がプラスのとき.

$$x=\frac{N-3}{\frac{N^2-9}{18}}=\frac{18}{N+3}$$

$N\geqq 7$ だから $N+3$ は 18 の 10 以上の約数で

$$N+3=18$$
$$N=15$$
$$9+36n=225$$
$$n=6$$

となる.

複号がマイナスのとき.

$$x=\frac{-3-N}{\frac{N^2-9}{18}}=-\frac{18}{N-3}$$

$N\geqq 7$ だから $N-3$ は 18 の 4 以上の約数で

$$N-3=6,\ 9,\ 18$$
$$N=9,\ 12,\ 21$$
$$9+36n=81,\ 144,\ 441$$
$$n=2,\ \frac{15}{4},\ 12$$

となる．n は正の整数だから $\boldsymbol{n=2, 6, 12}$

要の分析 全体的に，標準的な問題が並んでいる．確実に解きたい.

（植田，三輪，大貫，黒滝，松岡，藤田，安田亨）