《面積の難問》

1．実数 x に対して，

$$f(x)=x|2x+3|-|2x^2+4x|$$

とし，$y=f(x)$ で定まる xy 平面上のグラフを C とする．また，a は $-\dfrac{3}{2}<a<-1$ を満たす実数とする．点 $(a,\ f(a))$ における C の接線を l_a とする．

（1） C の概形を描け．

（2） l_a の式を求めよ．

（3） C と l_a のすべての共有点の座標を求めよ．

（4） C と l_a で囲まれる部分の面積 S_a を求めよ．

（20　東北大・理-AO）

▶解答◀ （**1**） 丁寧に場合分けをする．

（ア） $x \leqq -2$ のとき：

$$f(x)=-x(2x+3)-(2x^2+4x)=-4x^2-7x$$

$$f'(x)=-8x-7 \geqq 16-7>0$$

（イ） $-2 \leqq x \leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき：

$$f(x)=-x(2x+3)+(2x^2+4x)=x$$

（ウ） $-\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 0$ のとき：

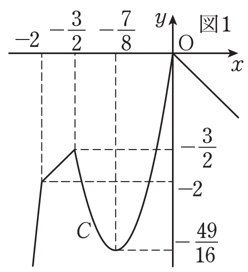
$$f(x)=x(2x+3)+(2x^2+4x)=4x^2+7x$$

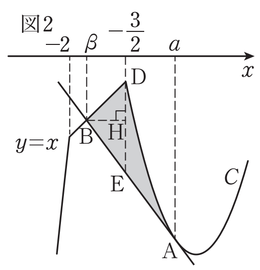
$$=4\left(x+\frac{7}{8}\right)^2-\frac{49}{16}$$

（エ） $x \geqq 0$ のとき：

$$f(x)=x(2x+3)-(2x^2+4x)=-x$$

これらを図示すると図 1 のようになる．





（**2**） $-\dfrac{3}{2}<x<-1$ においては $f(x)=4x^2+7x$

$f'(x)=8x+7$ である．l_a の方程式は

$$y=(8a+7)(x-a)+4a^2+7a$$

$$l_a : \boldsymbol{y=(8a+7)x-4a^2}$$

（**3**） l_a と $y=x$ を連立させて

$$x=(8a+7)x-4a^2$$

$$(4a+3)x=2a^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$4a+3<-4+3<0$ であるから $4a+3 \neq 0$ である．① の解を β とする．

$$\beta=\frac{2a^2}{4a+3}$$

$a=-1$ のとき $\beta=-2$ となるから，図形的に考えて，$-\dfrac{3}{2}<a<-1$ のときには $-2<\beta<-\dfrac{3}{2}$ である．また，l_a の傾き $8a+7<-1$ であるから，図形的に考え，l_a は $y=-x\ (x \geqq 0)$ とは交わらない．C と l_a の共有点の座標は $\mathbf{A}(\boldsymbol{a,\ 4a^2+7a})$，および，$\left(\boldsymbol{\dfrac{2a^2}{4a+3},\ \dfrac{2a^2}{4a+3}}\right)$ である．後者を B とする．

（**4**） 図 2 を参照せよ．$\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{D}\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$ とし，$\mathrm{E}\left(-\dfrac{3}{2},\ -(8a+7)\cdot\dfrac{3}{2}-4a^2\right)$ とする．D，E の y 座標の差で

$$\mathrm{DE}=-\frac{3}{2}+(8a+7)\cdot\frac{3}{2}+4a^2$$

$$=4a^2+12a+9$$

B から DE に下ろした垂線の足を H とすると，D，B の x 座標の差で

$$\mathrm{BH}=-\frac{3}{2}-\frac{2a^2}{4a+3}=\frac{-4a^2-12a-9}{2(4a+3)}$$

$\triangle$DBE の面積を S_1 とする．

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{DE}\cdot\mathrm{BH}=-\frac{(2a+3)^4}{4(4a+3)}$$

また，図形 ADE の面積を S_2 とすると

$$(4x^2+7x)-\{(8a+7)x-4a^2\}=4(x-a)^2$$

であるから

$$S_2=\int_{-\frac{3}{2}}^{a} 4(x-a)^2\,dx=\left[\ \frac{4}{3}(x-a)^3\ \right]_{-\frac{3}{2}}^{a}$$

$$=-\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{2}-a\right)^3=\frac{4}{3}\left(a+\frac{3}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2a+3)^3$$

$$S_a=S_1+S_2$$

$$=(2a+3)^3\left\{-\frac{2a+3}{4(4a+3)}+\frac{1}{6}\right\}$$

$$=(2a+3)^3\cdot\frac{(-6a-9)+2(4a+3)}{12(4a+3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{(2a+3)^3(2a-3)}{12(4a+3)}}$$