

**2** ある飲食店には横一列に並んだカウンター席が10席あるが、客は互いに2席以上空けて座らなければならない。

- (1) 同時に座ることのできる最大の客数を求めなさい。  
 (2) 客が2名のとき、席の空き方は何通りあるか。  
 (3) 客が1名以上のとき、席の空き方は全部で何通りあるか。

(21 龍谷大・推薦)

**2** **【数学A】【場合の数】【標準】**

**【考え方】** いろいろな解法がある。「席の空き方」という言葉が、2021年東大文科の場合の数の問題につながる。

**【解答】** 客の座席を○、空席を×と表す。

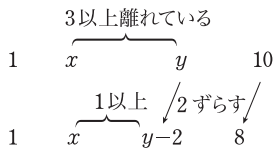
- (1) 同時に座ることのできる客数が最大となるのは、

$$\bigcirc \times \times \bigcirc \times \times \bigcirc \times \times \bigcirc$$

となる場合であるから、求める客数は4人である。

- (2) 10個の席に左から1, ..., 10と番号をつける。客が座る座席の番号を  $x, y$  ( $1 \leq x < y \leq 10$ ) とする。2席以上空けるという条件は  $y - x \geq 3$  ( $y - x > 2$ ) ということであり、 $1 \leq x < y - 2 \leq 8$  となる。

1, ..., 8から異なる2数を選ぶ組合せを考え、 $(x, y)$  は  ${}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$  通りある。



- (3) (ア) 客が1名のとき、10通り。  
 (イ) 客が2名のとき、(2)より28通り。  
 (ウ) 客が3名のとき、客が座る席の番号を  $x, y, z$  ( $1 \leq x < y < z \leq 10, y - x > 2, z - y > 2$ ) とする。  
 $1 \leq x < y - 2 < z - 4 \leq 6$  だから  $(x, y, z)$  の個数は

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

- (エ) 客が4名のとき、(1)より1通り。

以上より求める総数は  $10 + 28 + 20 + 1 = 59$  通り。

**【別解】** (2) もっと地道に調べる方法もある。

$x = 1$  のとき、 $y = 4, \dots, 10$  の7通り。

$x = 2$  のとき、 $y = 5, \dots, 10$  の6通り。

これを続け、 $(x, y)$  の個数は

$$7 + 6 + \dots + 1 = \frac{1}{2} 7 \cdot 8 = 28$$

- (3) (ウ)  $x = 1, y = 4$  のとき、 $z = 7, \dots, 10$  の4通り。  
 $x = 1, y = 5$  のとき、 $z = 8, 9, 10$  の3通り。

これを続け、 $x = 1$  のとき  $(y, z)$  の個数は  $4 + 3 + 2 + 1$

$x = 2$  のとき  $(y, z)$  の個数は  $3 + 2 + 1$

これを続け、 $(x, y, z)$  の個数は

$$(4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = 20$$

**【別解】** (2) 2つの着席と空席を、

空席  $x$  個、着席、空席  $y$  個、着席、空席  $z$  個と考える。

$$x + y + z = 8, x \geq 0, y \geq 2, z \geq 0$$

となるから

$$(x + 1) + (y - 1) + (z + 1) = 9,$$

$$x + 1 \geq 1, y - 1 \geq 1, z + 1 \geq 1$$

となる。ボールを9個並べ、その間から2カ所を選び、1本目から左のボールの個数を  $x + 1$ 、2本の仕切りの間のボールの個数を  $y - 1$ 、残りの個数を  $z + 1$  とする。たとえば

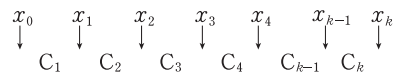
$$\bigcirc \bigcirc \mid \bigcirc \bigcirc \bigcirc \mid \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc$$

の場合は  $x + 1 = 2, y - 1 = 3, z + 1 = 4$  となる。自然数解  $(x + 1, y - 1, z + 1)$  の個数は、ボールの間(8カ所ある)から2カ所を選んで仕切りを突っ込むと考え、 ${}_8C_2 = 28$  通りある。

**【注意】**  $1^\circ$  【一般解】

カウンターが  $n$  席あって、 $k$  人座る場合を考える。ただし、ここでは  $k \geq 0$  とする。

$k \geq 2$  のとき、着席を左から  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$  とし、この両端と着席の間に空席を突っ込む。 $C_1$  の左に突っ込む空席の数を  $x_0$ 、 $C_1$  と  $C_2$  の間に突っ込む空席の数を  $x_1$ 、 $C_2$  と  $C_3$  の間に突っ込む空席の数を  $x_2$ 、 $C_{k-1}$  と  $C_k$  の間に突っ込む空席の数を  $x_{k-1}$ 、 $C_k$  の右に突っ込む空席の数を  $x_k$  とする。



$$x_0 \geq 0, x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_{k-1} \geq 2, x_k \geq 0$$

$$x_0 + \dots + x_k = n - k$$

である。 $x_0, x_k$  には1を加え、他は1を引いて

$$x_0 + 1 \geq 1, x_1 - 1 \geq 1, \dots, x_{k-1} - 1 \geq 1, x_k + 1 \geq 1$$

$$(x_0 + 1) + (x_1 - 1) + \dots + (x_{k-1} - 1) + (x_k + 1)$$

$$= n - k + 2 - (k - 1)$$

となる。この自然数解

$(x_0 + 1, x_1 - 1, \dots, x_{k-1} - 1, x_k + 1)$  の個数を求める。これは○を  $n - 2k + 3$  個並べ、その間 ( $n - 2k + 2$  カ所ある) から  $k$  カ所を選んで仕切りを入れ、1本目から左の○の個数を  $x_0 + 1$ 、1本目と2本目の仕切りの間の○の個数を  $x_1 - 1$ 、 $\dots$ 、 $k - 1$ 本目と  $k$ 本目の仕切りの間の○の個数を  $x_{k-1} - 1$ 、 $k$ 本目の仕切りの右の○の個数を  $x_k + 1$  とすると考え、 $n + 2 - 2k$   $C_k$  通りある。結果は  $k = 0$  (1通り)、 $k = 1$  のとき ( $n$ 通り) の場合にも成り立つ。

$n + 2 - 2k \geq k$  より  $k \leq \frac{n+2}{3}$  となる。 $k$  は整数

であるから  $0 \leq k \leq \left[ \frac{n+2}{3} \right]$  となる。

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\left[ \frac{n+2}{3} \right]} n + 2 - 2k C_k$$

である。 $[x]$  は  $x$  の整数部分を表す。

2°【漸化式】着席を C、空席を K で表す。 $n$ 席の場合の C、K の列 (総数は  $f(n)$  通り) は、左端が K の場合は  $f(n-1)$  通りあり、左端が C の場合は、左から3つが CKK で、後  $n-3$  個の列が  $f(n-3)$  通りある。

$$f(n) = f(n-1) + f(n-3)$$

となる。これは3次方程式  $x^3 = x^2 + 1$  の解が綺麗に求められないから、普通の形で、一般項を表示することはできない。「2席以上空ける」でなく「1席以上空ける」ならフィボナッチ数列になり、簡単な練習問題になる。