1 座標平面上で，放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(-\cos\theta, \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2 + y^2 = 1$ と共通の接線を持っている．ただし，$0° < \theta < 90°$ とする．

（1） a, b, c を $s = \sin\theta$ を用いて表せ．

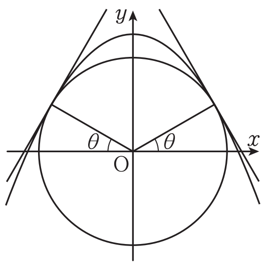
（2） 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ．

（3） $A \geqq \sqrt{3}$ を示せ． （24　東大・文科）

1 数学Ⅱ【面積】標 準

《3 つの相加・相乗 (B15) ☆》

▶解答◀ （1） y 軸に関する対称性より，$b = \mathbf{0}$ である．



$s = \sin\theta$ とおくと，C が P を通ることから

$$s = a\cos^2\theta + c = a(1 - s^2) + c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

である．また，C について $y' = 2ax$ で，P における接線の傾きが等しいことから

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 2a\cos\theta \qquad \therefore \quad a = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2s}}$$

① へ代入して

$$c = s - a(1 - s^2) = s + \frac{1}{2s}(1 - s^2)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{s} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}\right)$$

（2） $C : y = -\dfrac{1}{2s}x^2 + \dfrac{1}{2}\left(s + \dfrac{1}{s}\right)$ であるから，x 切片は $\left(\pm\sqrt{s^2+1}, 0\right)$ となる．よって，$\alpha = \sqrt{s^2+1}$ とおくと，求める面積は

$$A = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{-\frac{1}{2s}(x - \alpha)(x + \alpha)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{12s}(2\alpha)^3 = \frac{2}{3s}\alpha^3 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3s}}(\boldsymbol{s}^2 + \mathbf{1})^{\frac{3}{2}}$$

（3） $A = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}\left(s^{\frac{4}{3}} + \dfrac{1}{2s^{\frac{2}{3}}} + \dfrac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

相加・相乗平均の不等式より

$$A \geqq \frac{2}{3}\left(3\sqrt[3]{s^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

となり示された．

◆別解◆ **【微分したければどうぞ】**

文系であっても，微分したい人は，すればよい．

$t = s^2$ とおくと，$0 < t < 1$ であり，

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(s^2+1)^3}{s^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(t+1)^3}{t}}$$

$g(t) = \dfrac{(t+1)^3}{t}$ とおくと，

$$g'(t) = \frac{3(t+1)^2 t - (t+1)^3}{t^2}$$

$$= \frac{(t+1)^2(2t-1)}{t^2}$$

であるから，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘		↗	

これより，$t = \dfrac{1}{2}$ で最小値をとるから，

$$A \geqq \frac{2}{3}\sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

（ホクソム　椎茸・Sakura）