2 以下の問いに答えよ．必要ならば，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい．

（1） $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

（2） $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ．

（24　東大・文科）

2

数学II【対数の雑題】**標準**

《対数を不等式で与えるな (B15) ☆》

▶解答◀ （1） $5^n > 10^{19}$ の両辺の常用対数をとり

$$n \log_{10} 5 > 19 \qquad \therefore \quad n > \frac{19}{1-\log_{10} 2} \quad \cdots\cdots ①$$

である．ここで，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ より

$$27.1\cdots = \frac{19}{1-0.3} < \frac{19}{1-\log_{10} 2} < \frac{19}{1-0.31} = 27.5\cdots$$

であるから，① を満たす最小の自然数 n は **28** である．

（**2**）（1）より，$m = 28$ のときは明らかに成立する．m が大きいとき，5^m に比べて 4^m はかなり小さいので，（2）も $m = 28$ だろうと推測できる．$m = 27$ では成立しない，すなわち，$5^{27} + 4^{27} \leqq 10^{19}$ であることを示す．

$$\log_{10} 5^{27} = 27(1-\log_{10} 2) < 18.9 < 18 + 3\log_{10} 2$$

であるから，$5^{27} < 8 \cdot 10^{18}$ である．また，

$$\log_{10} 4^{27} = 54 \log_{10} 2 < 16.74 < 16 + 3\log_{10} 2$$

であるから，$4^{27} < 8 \cdot 10^{16}$ である．よって，

$$5^{27} + 4^{27} < 8 \cdot 10^{18} + 8 \cdot 10^{16} = 8.08 \cdot 10^{18} < 10^{19}$$

となるから，$m = 27$ では成立しない．これより，$5^m + 4^m > 10^{19}$ を満たす最小の自然数は $m =$ **28** である．

（ホクソム　椎茸・Sakura）