3 座標平面上に 2 点 O$(0,0)$, A$(0,1)$ をとる．x 軸上の 2 点 P$(p,0)$, Q$(q,0)$ が，次の条件（A），（B）をともに満たすとする．

（A） $0<p<1$ かつ $p<q$

（B） 線分 AP の中点を M とするとき，$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{PMQ}$

（1） q を p を用いて表せ．

（2） $q=\dfrac{1}{3}$ となる p の値を求めよ．

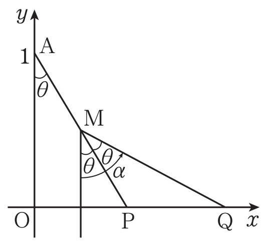
（3） $\triangle$OAP の面積を S，$\triangle$PMQ の面積を T とする．$S>T$ となる p の範囲を求めよ．　（24　東大・文科）

3

数学Ⅱ【三角関数の図形への応用】**標 準**

《加法定理の使い方（B20）☆》

▶解答◀ （**1**） 図のように角度 θ,α をとる．



このとき $\tan\theta=p$, $\tan\alpha=\dfrac{q-\dfrac{p}{2}}{\dfrac{1}{2}}=2q-p$ であり，

$\alpha=2\theta$ を合わせると

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$2q-p=\frac{2p}{1-p^2}\qquad\therefore\quad q=\boldsymbol{\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}}$$

（**2**） $q=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}=\frac{1}{3}$$

$$3p(3-p^2)=2(1-p^2)$$

$$3p^3-2p^2-9p+2=0$$

$$(p-2)(3p^2+4p-1)=0$$

$$p=2,\ \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$$

$0<p<q=\dfrac{1}{3}$ より，$p=\boldsymbol{\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}}$

（**3**） $S=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot=\dfrac{p}{2}$

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(q-p)=\frac{1}{4}(q-p)$$

$S>T$ より

$$\frac{p}{2}>\frac{1}{4}(q-p)$$

$$q<3p$$

$$\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}<3p$$

$p>0$ で割って，$2(1-p^2)>0$ をかけて

$$3-p^2<6(1-p^2)\qquad\therefore\quad 5p^2<3$$

$0<p<1$ も合わせて．$\boldsymbol{0<p<\dfrac{\sqrt{15}}{5}}$

（ホクソム　椎茸・Sakura）