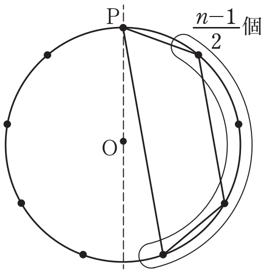
4 n を 5 以上の奇数とする．平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える．n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ．ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする．選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ．（24　東大・文科）

4

数学A【確率の雑題】標 準

《O を内部に含む (B20) ☆》

▶解答◀ 余事象は四角形が O を内部に含まないことである．



このような四角形の内，O との距離が最も近い辺において，O から見て左側にある頂点を P とする．P の選び方は n 通りある．四角形が O を内部に含まないとき，残りの 3 つの頂点は図の $\frac{n-1}{2}$ 個の頂点から 3 つ選ばれるから，${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3$ 通りある（n は奇数より，四角形の辺が直径となることはない）．

よって，O を内部に含まない四角形は

$$n\cdot{}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3=n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}$$

$$=\frac{1}{48}n(n-1)(n-3)(n-5)$$

であるから，O を内部に含む四角形は

$${}_n\mathrm{C}_4-n\cdot{}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$-\frac{1}{48}n(n-1)(n-3)(n-5)$$

$$=\frac{1}{48}n(n-1)(n-3)\{2(n-2)-(n-5)\}$$

$$=\frac{1}{48}n(n+1)(n-1)(n-3)$$

となる．よって求める確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_4-n\cdot{}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_4}=\frac{\frac{1}{48}n(n+1)(n-1)(n-3)}{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n+1}{2(n-2)}}$$

（ホクソム　椎茸・Sakura）