東京大学・文科

1　座標平面上で，放物線 $C: y=ax^2+bx+c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(-\cos\theta, \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2+y^2=1$ と共通の接線を持っている．ただし，$0^\circ<\theta<90^\circ$ とする．

（1）　a, b, c を $s=\sin\theta$ を用いて表せ．

（2）　放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ．

（3）　$A \geqq \sqrt{3}$ を示せ．

2　以下の問いに答えよ．必要ならば，$0.3<\log_{10}2<0.31$ であることを用いてよい．

（1）　$5^n>10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

（2）　$5^m+4^m>10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ．

3　座標平面上に 2 点 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(0, 1)$ をとる．x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(p, 0)$, $\mathrm{Q}(q, 0)$ が，次の条件（A），（B）をともに満たすとする．

（A）　$0<p<1$ かつ $p<q$

（B）　線分 AP の中点を M とするとき，$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{PMQ}$

（1）　q を p を用いて表せ．

（2）　$q=\dfrac{1}{3}$ となる p の値を求めよ．

（3）　$\triangle\mathrm{OAP}$ の面積を S，$\triangle\mathrm{PMQ}$ の面積を T とする．$S>T$ となる p の範囲を求めよ．

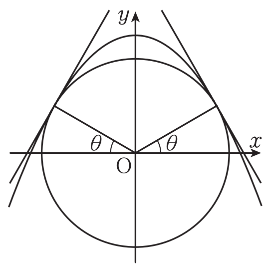
4　n を 5 以上の奇数とする．平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える．n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ．ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする．選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ．

1

数学Ⅱ【面積】**標準**

《3 つの相加・相乗 (B15) ☆》

▶解答◀　（1）　y 軸に関する対称性より，$b=\mathbf{0}$ である．



$s=\sin\theta$ とおくと，C が P を通ることから

$$s=a\cos^2\theta+c=a(1-s^2)+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

である．また，C について $y'=2ax$ で，P における接線の傾きが等しいことから

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=2a\cos\theta \qquad \therefore\quad a=-\boldsymbol{\frac{1}{2s}}$$

① へ代入して

$$c=s-a(1-s^2)=s+\frac{1}{2s}(1-s^2)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)}$$

（**2**）　$C: y=-\dfrac{1}{2s}x^2+\dfrac{1}{2}\left(s+\dfrac{1}{s}\right)$ であるから，x 切片は $\left(\pm\sqrt{s^2+1}, 0\right)$ となる．よって，$\alpha=\sqrt{s^2+1}$ とおくと，求める面積は

$$A=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{-\frac{1}{2s}(x-\alpha)(x+\alpha)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{12s}(2\alpha)^3=\frac{2}{3s}\alpha^3=\boldsymbol{\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

（**3**）　$A=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\left(s^{\frac{4}{3}}+\dfrac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

相加・相乗平均の不等式より

$$A\geqq\frac{2}{3}\left(3\sqrt[3]{s^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}$$

となり示された．

♦別解♦　**【微分したければどうぞ】**

文系であっても，微分したい人は，すればよい．

$t=s^2$ とおくと，$0<t<1$ であり，

$$A=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{(s^2+1)^3}{s^2}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{(t+1)^3}{t}}$$

$g(t)=\dfrac{(t+1)^3}{t}$ とおくと，

$$g'(t)=\frac{3(t+1)^2t-(t+1)^3}{t^2}$$

$$=\frac{(t+1)^2(2t-1)}{t^2}$$

であるから，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘		↗	

これより，$t=\frac{1}{2}$ で最小値をとるから，

$$A \geqq \frac{2}{3}\sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

（ホクソム　椎茸・Sakura）

2 数学Ⅱ【対数の雑題】標準
《対数を不等式で与えるな (B15) ☆》

▶解答◀　（1）　$5^n > 10^{19}$ の両辺の常用対数をとり

$$n\log_{10}5 > 19 \qquad \therefore\quad n > \frac{19}{1-\log_{10}2} \quad \cdots\cdots①$$

である．ここで，$0.3 < \log_{10}2 < 0.31$ より

$$27.1\cdots = \frac{19}{1-0.3} < \frac{19}{1-\log_{10}2} < \frac{19}{1-0.31} = 27.5\cdots$$

であるから，① を満たす最小の自然数 n は **28** である．

（**2**）（1）より，$m=28$ のときは明らかに成立する．m が大きいとき，5^m に比べて 4^m はかなり小さいので，（2）も $m=28$ だろうと推測できる．$m=27$ では成立しない，すなわち，$5^{27}+4^{27} \leqq 10^{19}$ であることを示す．

$$\log_{10}5^{27} = 27(1-\log_{10}2) < 18.9 < 18+3\log_{10}2$$

であるから，$5^{27} < 8\cdot 10^{18}$ である．また，

$$\log_{10}4^{27} = 54\log_{10}2 < 16.74 < 16+3\log_{10}2$$

であるから，$4^{27} < 8\cdot 10^{16}$ である．よって，

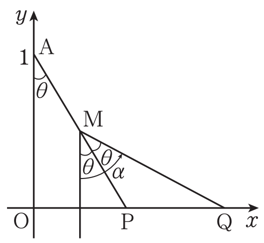
$$5^{27}+4^{27} < 8\cdot 10^{18} + 8\cdot 10^{16} = 8.08\cdot 10^{18} < 10^{19}$$

となるから，$m = 27$ では成立しない．これより，$5^m + 4^m > 10^{19}$ を満たす最小の自然数は $m = \mathbf{28}$ である．

（ホクソム　椎茸・Sakura）

3 数学Ⅱ【三角関数の図形への応用】標準
《加法定理の使い方 (B20) ☆》

▶解答◀　（1）　図のように角度 θ, α をとる．



このとき $\tan\theta = p$, $\tan\alpha = \dfrac{q-\frac{p}{2}}{\frac{1}{2}} = 2q-p$ であり，

$\alpha = 2\theta$ を合わせると

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$2q-p = \frac{2p}{1-p^2} \qquad \therefore\quad q = \boldsymbol{\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}}$$

（**2**）　$q=\frac{1}{3}$ のとき

$$\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)} = \frac{1}{3}$$

$$3p(3-p^2) = 2(1-p^2)$$

$$3p^3-2p^2-9p+2 = 0$$

$$(p-2)(3p^2+4p-1) = 0$$

$$p = 2,\ \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$$

$0 < p < q = \frac{1}{3}$ より，$p = \boldsymbol{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}$

（**3**）　$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot = \frac{p}{2}$

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(q-p) = \frac{1}{4}(q-p)$$

$S > T$ より

$$\frac{p}{2} > \frac{1}{4}(q-p)$$

$$q < 3p$$

$$\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)} < 3p$$

$p>0$ で割って，$2(1-p^2)>0$ をかけて

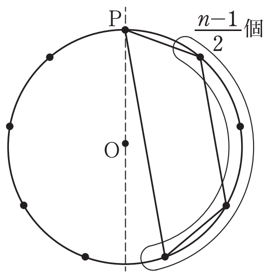
$$3-p^2 < 6(1-p^2) \qquad \therefore\quad 5p^2 < 3$$

$0 < p < 1$ も合わせて．$\boldsymbol{0 < p < \frac{\sqrt{15}}{5}}$

（ホクソム　椎茸・Sakura）

4 数学A【確率の雑題】標準
《O を内部に含む (B20) ☆》

▶解答◀　余事象は四角形が O を内部に含まないことである．



このような四角形の内，O との距離が最も近い辺において，O から見て左側にある頂点を P とする．P の選び方は n 通りある．四角形が O を内部に含まないとき，残りの 3 つの頂点は図の $\frac{n-1}{2}$ 個の頂点から 3 つ選ばれるから，${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3$ 通りある（n は奇数より，四角形の辺が直径となることはない）．

よって，O を内部に含まない四角形は

$$n\cdot {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3 = n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-5}{2}$$

$$=\frac{1}{48}n(n-1)(n-3)(n-5)$$

であるから，O を内部に含む四角形は

$${}_n\mathrm{C}_4 - n\cdot {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$-\frac{1}{48}n(n-1)(n-3)(n-5)$$

$$=\frac{1}{48}n(n-1)(n-3)\{2(n-2)-(n-5)\}$$

$$=\frac{1}{48}n(n+1)(n-1)(n-3)$$

となる．よって求める確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_4 - n\cdot {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_4} = \frac{\frac{1}{48}n(n+1)(n-1)(n-3)}{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n+1}{2(n-2)}}$$

（ホクソム　椎茸・Sakura）

要の分析

()