1 座標空間内の点 A$(0,\ -1,\ 1)$ をとる．xy 平面上の点 P が次の条件（A）（B）（C）をすべて満たすとする．

（A） P は原点 O と異なる．

（B） $\angle \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

（C） $\angle \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ．（24 東大・理科）

1

数学Ⅲ【楕円】**標 準**

《円錐の方程式 (B20) ☆》

▶解答◀ $\mathrm{P}(X,\ Y,\ 0)$ とする．

このとき

$$\cos\angle \mathrm{AOP} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \frac{-Y}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2}}$$

である．$\angle \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$ より $\cos\angle \mathrm{AOP} \leqq -\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{-Y}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2}} \leqq -\frac{1}{2}$$

$$2Y \geqq \sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2}$$

$Y \geqq 0$ のもとで平方して

$$4Y^2 \geqq 2(X^2+Y^2)$$

$$(Y-X)(Y+X) \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる．また，

$$\cos\angle \mathrm{OAP} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = (0,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (X,\ Y+1,\ -1)$ であり

$$\cos\angle \mathrm{OAP} = \frac{Y+1+1}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+(Y+1)^2+1}}$$

である．$\angle \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$ より $\cos\angle \mathrm{OAP} \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\frac{Y+2}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+(Y+1)^2+1}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2(Y+2) \geqq \sqrt{6}\sqrt{X^2+(Y+1)^2+1}$$

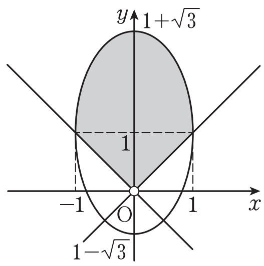
$Y \geqq -2$ のもとで平方して

$$4(Y+2)^2 \geqq 6\{X^2+(Y+1)^2+1\}$$

$$3X^2+Y^2-2Y-2 \leqq 0$$

$$X^2+\frac{(Y-1)^2}{3} \leqq 1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，② を図示すると，境界を含む網目部分である（原点を除く）．



（ホクソム　椎茸・Sakura）