**2** 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt \ (0 \leqq x \leqq 1)$$

（1） $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 $\alpha$ で，$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ．

（2） （1）で求めた $\alpha$ に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

（3） 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．必要ならば，$0.69<\log 2<0.7$ であることを用いてよい．（24　東大・理科）

## 2 数学Ⅲ【微積分の雑題】標 準

**《定義の理解は正しくしよう (B20)》**

**▶解答◀** （1）

$$f(x)=\int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}\,dt$$

$$=\int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt-\int_1^x \frac{t-x}{1+t^2}\,dt$$

$$=x\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$-\int_1^x \frac{t}{1+t^2}\,dt+x\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$f'(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}+x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}$$

$$-\frac{x}{1+x^2}+\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}+x\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}+\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$$

ここで，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ かつ $x=\tan\alpha$ を満たす $\alpha$ をとる．

$t=\tan\theta$ とすると

| $t$ | $0\to\tan\alpha$ | $1\to\tan\alpha$ |
|---|---|---|
| $\theta$ | $0\to\alpha$ | $\frac{\pi}{4}\to\alpha$ |

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$f'(\tan\alpha)=\int_0^\alpha d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^\alpha d\theta$$

$$=\Big[\,\theta\,\Big]_0^\alpha+\Big[\,\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^\alpha=\alpha+\alpha-\frac{\pi}{4}$$

これより，$f'(\tan\alpha)=0$ となる $\alpha$ は $\alpha=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{8}}$ である．

なお，これは $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たしている．

（2） $\tan^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2$

$\tan\dfrac{\pi}{8}>0$ より，$\tan\alpha=\tan\dfrac{\pi}{8}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

（3） $\beta=\sqrt{2}-1$ とおく．（1）より，$y=\tan\theta$ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ で単調増加であることと合わせて，$f(x)$ の増減表は以下のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

$$f(0)=\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(t^2+1)'}{t^2+1}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\,\log(t^2+1)\,\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

$$f(\beta)=\beta\int_0^\beta \frac{dt}{1+t^2}-\int_0^\beta \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$-\int_1^\beta \frac{t}{1+t^2}\,dt+\beta\int_1^\beta \frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\beta f'(\beta)-\int_0^\beta \frac{t}{1+t^2}\,dt-\int_1^\beta \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\,\log(t^2+1)\,\Big]_0^\beta-\frac{1}{2}\Big[\,\log(t^2+1)\,\Big]_1^\beta$$

$$=-\log(\beta^2+1)+\frac{1}{2}\log 2$$

$$=\log\sqrt{2}-\log(4-2\sqrt{2})=\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$f(1)=\int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2}\,dt$$

$$=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}-\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

$f(0)$ と $f(1)$ の大小を比べると，$\dfrac{\pi}{4}\fallingdotseq 0.785$ であり，$0.69<\log 2<0.7$ であることから

$$f(1)-f(0)=\frac{\pi}{4}-\log 2>0$$

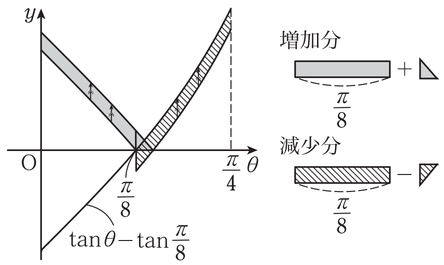
したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2}$，最小値は $\boldsymbol{\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$ である．

**◆別解◆** **【はみ出し削り論法】**

実は計算をしなくても，最小値をとる $x$ の値を求めることができる．$t=\tan\theta$ と置換すると，$dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ で，

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\tan\theta-x|\,d\theta$$

となる．




$x=\tan\dfrac{\pi}{8}=\beta$ から右に動いたとき，$f(x)$ の

増加部分 ＝ 網目部分 ……………………………①

減少部分 ＝ 斜線部分 ……………………………②

である．$y$ 方向の幅は一定であるから，等積変形することができる．

これより，① > ② であるから，$x=\beta$ から右に動いたとき，$f(x)>f(\beta)$ である．同様に考えると，$x=\beta$ から左に動いたときも $f(x)>f(\beta)$ である．

よって，$f(x)$ は $x=\beta=\sqrt{2}-1$ で最小値をとる．このような論法を「はみ出し削り論法」という．

（ホクソム　椎茸・Sakura）