3 座標平面上を次の規則(A), (B)に従って1秒ごとに動く点Pを考える.

(A) 最初に, Pは点$(2, 1)$にいる.

(B) ある時刻でPが点(a, b)にいるとき, その1秒後にはPは

- 確率$\dfrac{1}{3}$でx軸に関して(a, b)と対称な点
- 確率$\dfrac{1}{3}$でy軸に関して(a, b)と対称な点
- 確率$\dfrac{1}{6}$で直線$y = x$に関して(a, b)と対称な点
- 確率$\dfrac{1}{6}$で直線$y = -x$に関して(a, b)と対称な点

にいる. 以下の問いに答えよ. ただし, (1)については, 結論のみ書けばよい.

(1) Pがとりうる点の座標をすべて求めよ.

(2) nを正の整数とする. 最初からn秒後にPが点$(2, 1)$にいる確率と, 最初からn秒後にPが点$(-2, -1)$にいる確率は等しいことを示せ.

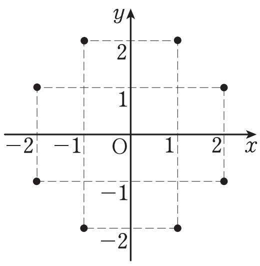
(3) nを正の整数とする. 最初からn秒後にPが点$(2, 1)$にいる確率を求めよ. (24 東大・理科)

3

数学B 【確率と漸化式】 標準

《事象を正しく把握せよ (C20)》

▶解答◀ (1) とりうる点を図示すると, 以下のようになる.



よって, Pがとりうる点の座標は

$\mathbf{(1, 2), (-1, 2), (-2, 1), (-2, -1),}$

$\mathbf{(-1, -2), (1, -2), (2, -1), (2, 1)}$

(2) 1秒後には確率$\dfrac{2}{3}$で$(2, -1)$または$(-2, 1)$に, 確率$\dfrac{2}{6}$で$(1, 2)$または$(-1, -2)$にある. これは, $(2, 1)$と$(-2, -1)$からみて対称な配置であるから, n秒後において点$(2, 1)$にいる確率と$(-2, -1)$は等しい.

(3) $A = \{(2, 1), (-2, -1)\}$

$B = \{(-1, 2), (1, -2)\}$

$C = \{(1, 2), (-1, -2)\}$

$D = \{(-2, 1), (2, -1)\}$

とする. このとき, Pは奇数秒後にはCまたはDに, 偶数秒後にはAまたはBにいるから, nが奇数のときPが点$(2, 1)$にいる確率は$\mathbf{0}$である. Pが$n = 2k$秒後にA, Bにいる確率をそれぞれa_{2k}, b_{2k}とすると,

$$a_{2k} + b_{2k} = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

である. また, $2k+2$秒後にAにいるのは, $2k$秒後にAにいて, 2度軸または2度$y = \pm x$に関して対称移動するか, $2k$秒後にBにいて, 1度は軸, 1度は$y = \pm x$に関して対称移動するかのいずれかであるから,

$$a_{2k+2} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2\right\}a_{2k} + 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{6}b_{2k}$$

$$a_{2k+2} = \frac{5}{9}a_{2k} + \frac{4}{9}b_{2k}$$

①を用いると

$$a_{2k+2} = \frac{5}{9}a_{2k} + \frac{4}{9}(1 - a_{2k}) = \frac{1}{9}a_{2k} + \frac{4}{9}$$

これより, $a_{2(k+1)} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{9}\left(a_{2k} - \dfrac{1}{2}\right)$となり, 数列$\left\{a_{2k} - \dfrac{1}{2}\right\}$は等比数列となるから, $a_0 = 1$も合わせて

$$a_{2k} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{9}\right)^k\left(a_0 - \frac{1}{2}\right)$$

$$a_{2k} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{9}\right)^k\right\}$$

となる. (2)よりn秒後に$(2, 1)$にいる確率と$(-2, -1)$にいる確率は等しいから, **nが偶数のとき** $\dfrac{1}{4}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$である.

(ホクソム 椎茸・Sakura)