4 $f(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$ とおく．$0 < t < 4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y = f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心を持つ円を C_t とする．

（1） 円 C_t の中心の座標を $(c(t),\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく．$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ．

（2） 実数 a は $0 < a < f(3)$ を満たすとする．円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0 < t < 4$ の範囲にいくつあるか．

（24 東大・理科）

4

数学Ⅱ【関数の増減・極値】**標準**

《文字定数は分離せよ（B15）》

▶解答◀ （1） $y = f(x)$ の $(t,\ f(t))$ における法線の方程式を考えると，$f'(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ より

$$y = \frac{\sqrt{2}}{t}(x-t) + \left(\frac{-\sqrt{2}}{4}t^2 + 4\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{t}x - \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 3\sqrt{2}$$

これが円 C_t の中心 $(c(t),\ 0)$ を通るので

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{t}c(t) - \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 3\sqrt{2}$$

$$c(t) = \boldsymbol{\frac{1}{4}t^3 - 3t}$$

円 C_t の方程式は

$$(x - c(t))^2 + y^2 = \{r(t)\}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

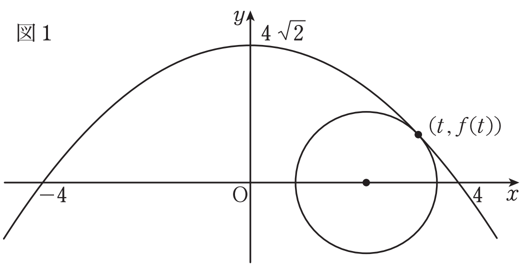
であり，これが $(t,\ f(t))$ を通ることから

$$\{r(t)\}^2 = \left\{t - \left(\frac{1}{4}t^3 - 3t\right)\right\}^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 4\sqrt{2}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{4}t^3 + 4t\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 4\sqrt{2}\right)^2$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{16}t^6 - \frac{15}{8}t^4 + 12t^2 + 32}$$

図 1



（2） 円 C_t が $(3,\ a)$ を通ることから，① より

$$(3 - c(t))^2 + a^2 = \{r(t)\}^2$$

$$a^2 = \{r(t)\}^2 - (3 - c(t))^2$$

$$= \frac{1}{16}t^6 - \frac{15}{8}t^4 + 12t^2 + 32 - \left(3 + 3t - \frac{1}{4}t^3\right)^2$$

$$= -\frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$$

ここで，$g(t) = -\dfrac{3}{8}t^4 + \dfrac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$ とおくと，求める t の個数は，$0 < a < f(3)$ としたときの $y = a^2$ と $y = g(t)$ の共有点の個数である．

$$g'(t) = -\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 6t - 18$$

$$= -\frac{3}{2}(t^3 - 3t^2 - 4t + 12)$$

$$= -\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)$$

これより，$g(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	$-$		
$g(t)$		↘		↗		↘	

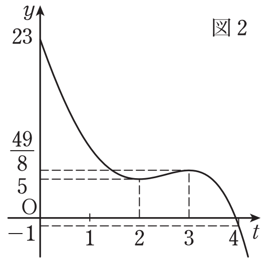
$$g(0) = 23,\ g(2) = -6 + 12 + 12 - 36 + 23 = 5,$$

$$g(3) = -\frac{243}{8} + \frac{81}{2} + 27 - 54 + 23 = \frac{49}{8},$$

$$g(4) = -96 + 96 + 48 - 72 + 23 = -1$$

であるから，$y = g(t)$ のグラフは図 2 のようになる．

図 2



これより，$0 < a < f(3)$ における $y = a^2$ と $y = g(t)$ の共有点の個数を考える．

$$f(3) = -\frac{9}{4}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \frac{7}{4}\sqrt{2}$$

より，$0 < a^2 < \dfrac{49}{8}$ であるから，$0 < t < 4$ の範囲での共有点の個数は

$0 < a < \sqrt{5}$ のとき，1 個

$a = \sqrt{5}$ のとき，2 個

$\sqrt{5} < a < \dfrac{7}{4}\sqrt{2}$ のとき，3 個

（ホクソム　椎茸・Sakura）