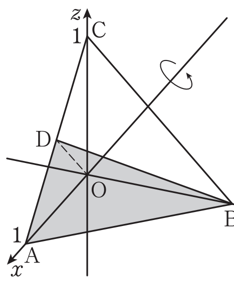
5 座標空間内に 3 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) をとり，D を線分 AC の中点とする．三角形 ADB の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ． （24 東大・理科）

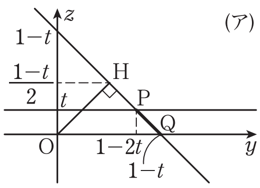
5

数学Ⅲ【体積】標 準

《$x=t$ で切る (B25)》

▶解答◀ 平面 ABC の方程式は $x+y+z=1$ であり，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\,0,\,\dfrac{1}{2}\right)$ である．また，平面 OBD の方程式は $z=x$ である．yz 平面に平行な平面 $x=t$ における断面を考える．





（ア） $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき：

$\dfrac{1}{2}(1-t) \geqq t$ である．

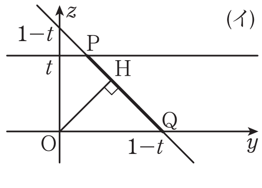
断面は図のような線分 PQ になる．この線分 PQ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる同心円で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とすると，$\mathrm{OP} \leqq \mathrm{OQ}$ より

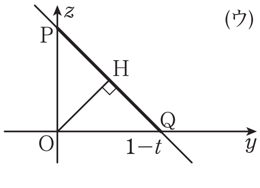
$$S(t)=\pi(\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OP}^2)$$
$$=\pi\{(1-t)^2-((1-2t)^2+t^2)\}$$
$$=\pi(-4t^2+2t)$$

（イ） $\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき：

$$S(t)=\pi(\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OH}^2)$$
$$=\pi\left\{(1-t)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t)\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\pi(1-t)^2$$

（ウ） $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき：





（イ）と同様に $S(t)=\dfrac{\pi}{2}(1-t)^2$

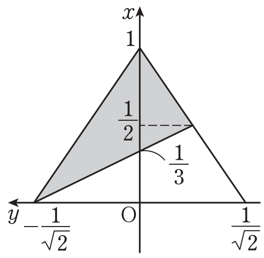
以上より，求める立体の体積 V は

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\frac{1}{3}}(-4t^2+2t)\,dt+\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{1}{2}(1-t)^2\,dt$$
$$=\left[-\frac{4}{3}t^3+t^2\right]_0^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{1}{6}(1-t)^3\right]_{\frac{1}{3}}^{1}$$
$$=\frac{5}{81}+\frac{4}{81}=\frac{1}{9}$$

よって，$V=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{9}}$ である．

◆別解◆ **【積分？場合分け？そんなもんしないよ】**

立式の過程からわかるように，ベクトル (0, 1, 1) 方向の成分は無視できるから，三角形 ADB を平面 $z=-y$ に射影してできる図形を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積に等しい．これは，三角形 ADB を x 軸のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させたのち，xy 平面に射影した図形に等しく，それは，次図の網目部分である．



よって，この回転体は，底面の半径が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，高さが 1 の円錐から，底面の半径が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，高さが $\dfrac{1}{3}$ の円錐をひいたものになるから，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\pi\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\pi\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}}$$

（ホクソム 椎茸・Sakura）