6 2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という．以下の問いに答えよ．

（1） $f(x)=x^3+10x^2+20x$ とする．$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

（2） a, b を整数の定数とし，$g(x)=x^3+ax^2+bx$ とする．$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ．

（24 東大・理科）

6

数学A【整数問題の雑題】やや難

《素数の論証 (C40) ☆》

▶解答◀ （1） $f(n)=n(n^2+10n+20)$

これが素数となるとき，次の 2 通りがある．

【$n=\pm 1$ のとき】:

$$f(1)=31,\ f(-1)=-11$$

となるから，$n=1$ のみ適する．

【$n^2+10n+20=\pm 1$ のとき】:

$n^2+10n+20=1$ のとき，$n^2+10n+19=0$ は整数解を持たない．

$n^2+10n+20=-1$ を解くと，$n=-3, -7$ であり，$f(-3)=3,\ f(-7)=7$ となり，$n=-3, -7$ が適する．

よって，$n=\mathbf{1, -3, -7}$ である．

（2） $g(n)=n(n^2+an+b)$

【$n=\pm 1$ のとき】:

$$g(1)=1+a+b \quad \cdots\cdots ①$$

$$g(-1)=-(1-a+b)=-1+a-b \quad \cdots\cdots ②$$

【$n^2+an+b=1$ のとき】:

p を素数として，$n=p$ となるから

$$p^2+ap+(b-1)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

【$n^2+an+b=-1$ のとき】:

q を素数として $n=-q$ となるから

$$q^2-aq+(b+1)=0 \quad \cdots\cdots ④$$

まず，異なる素数 p, q に対して ③ と ④ が共に成立することがあるかどうかを考える．

$$pa+b=1-p^2 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$-qa+b=-1-q^2 \quad \cdots\cdots ⑥$$

(⑤ − ⑥) ÷ $(p+q)$ より

$$a=\frac{2-p^2+q^2}{p+q}=\frac{2}{p+q}-(p-q)$$

となるが，$p+q \geqq 4$ より a は整数とならないから，異なる素数 p, q に対して ③ と ④ が共に成立することはない．これより，素数になる候補は「①，②，③ の異なる 2 つの正の解」，もしくは，「①，②，④ の異なる 2 つの正の解」である．

③ の解 p_1, p_2 がいずれも素数であったとすると，解と係数の関係より

$$p_1+p_2=-a,\ \ p_1p_2=b-1$$

であるから，

$$② = -1-(p_1+p_2)-(p_1p_2+1)$$

$$=-(p_1+1)(p_2+1)-1<0$$

となるから，①，②，③ の異なる 2 つの正の解がすべて素数となることはない．

④ の解 q_1, q_2 がいずれも素数であったとすると，解と係数の関係より

$$q_1+q_2=a,\ \ q_1q_2=b+1$$

であるから，

$$② = -1+(q_1+q_2)-(q_1q_2-1)$$

$$=-(q_1-1)(q_2-1)+1<0$$

となるから，①，②，④ の異なる 2 つの正の解がすべて素数となることもない．

よって，$g(n)$ が素数となるような n は高々 3 個である．

（ホクソム 椎茸・Sakura）