東京大学・理科

1 座標空間内の点 A$(0,\ -1,\ 1)$ をとる．xy 平面上の点 P が次の条件（A）（B）（C）をすべて満たすとする．

（A） P は原点 O と異なる．

（B） $\angle\mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

（C） $\angle\mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ．

2 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt\ (0 \leqq x \leqq 1)$$

（1） $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で，$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ．

（2） （1）で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

（3） 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．必要ならば，$0.69<\log 2<0.7$ であることを用いてよい．

3 座標平面上を次の規則（A），（B）に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える．

（A） 最初に，P は点 $(2,1)$ にいる．

（B） ある時刻で P が点 (a,b) にいるとき，その 1 秒後には P は

- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して (a,b) と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して (a,b) と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=x$ に関して (a,b) と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=-x$ に関して (a,b) と対称な点

にいる．以下の問いに答えよ．ただし，（1）については，結論のみ書けばよい．

（1） P がとりうる点の座標をすべて求めよ．

（2） n を正の整数とする．最初から n 秒後に P が点 $(2,1)$ にいる確率と，最初から n 秒後に P が点 $(-2,-1)$ にいる確率は等しいことを示せ．

（3） n を正の整数とする．最初から n 秒後に P が点 $(2,1)$ にいる確率を求めよ．

4 $f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$ とおく．$0<t<4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y=f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心を持つ円を C_t とする．

（1） 円 C_t の中心の座標を $(c(t),\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく．$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ．

（2） 実数 a は $0<a<f(3)$ を満たすとする．円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0<t<4$ の範囲にいくつあるか．

5 座標空間内に 3 点 A$(1,0,0)$, B$(0,1,0)$, C$(0,0,1)$ をとり，D を線分 AC の中点とする．三角形 ADB の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ．

6 2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という．以下の問いに答えよ．

（1） $f(x)=x^3+10x^2+20x$ とする．$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

（2） $a,\ b$ を整数の定数とし，$g(x)=x^3+ax^2+bx$ とする．$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ．

1

数学Ⅲ 【楕円】 標 準

《円錐の方程式（B20）☆》

▶解答◀ P$(X,\ Y,\ 0)$ とする．

このとき

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{-Y}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2}}$$

である．$\angle\mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$ より $\cos\angle\mathrm{AOP} \leqq -\dfrac{1}{2}$ である

から

$$\frac{-Y}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2}} \leqq -\frac{1}{2}$$

$$2Y \geqq \sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2}$$

$Y \geqq 0$ のもとで平方して

$$4Y^2 \geqq 2(X^2+Y^2)$$

$$(Y-X)(Y+X) \geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる．また，

$$\cos\angle\mathrm{OAP} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = (0,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (X,\ Y+1,\ -1)$ であり

$$\cos\angle\mathrm{OAP} = \frac{Y+1+1}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+(Y+1)^2+1}}$$

である．$\angle\mathrm{OAP} \leqq \frac{\pi}{6}$ より $\cos\angle\mathrm{OAP} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\frac{Y+2}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+(Y+1)^2+1}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2(Y+2) \geqq \sqrt{6}\sqrt{X^2+(Y+1)^2+1}$$

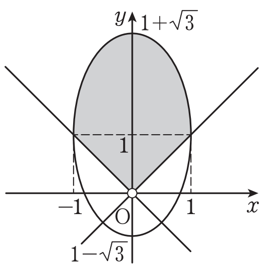
$Y \geqq -2$ のもとで平方して

$$4(Y+2)^2 \geqq 6\{X^2+(Y+1)^2+1\}$$

$$3X^2+Y^2-2Y-2 \leqq 0$$

$$X^2+\frac{(Y-1)^2}{3} \leqq 1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，② を図示すると，境界を含む網目部分である（原点を除く）．



（ホクソム　椎茸・Sakura）

2 数学III【微積分の雑題】標準

《定義の理解は正しくしよう (B20)》

▶解答◀　（1）

$$f(x) = \int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt + \int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt - \int_1^x \frac{t-x}{1+t^2}\,dt$$

$$= x\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$- \int_1^x \frac{t}{1+t^2}\,dt + x\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$f'(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + x\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$-\frac{x}{1+x^2} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} + x\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$$

ここで，$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ かつ $x = \tan\alpha$ を満たす α をとる．$t = \tan\theta$ とすると

t	$0 \to \tan\alpha$	$1 \to \tan\alpha$
θ	$0 \to \alpha$	$\frac{\pi}{4} \to \alpha$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$f'(\tan\alpha) = \int_0^\alpha d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^\alpha d\theta$$

$$= \Big[\ \theta\ \Big]_0^\alpha + \Big[\ \theta\ \Big]_{\frac{\pi}{4}}^\alpha = \alpha + \alpha - \frac{\pi}{4}$$

これより，$f'(\tan\alpha) = 0$ となる α は $\alpha = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$ である．

なお，これは $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ を満たしている．

（**2**）　$\tan^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$

$\tan\frac{\pi}{8} > 0$ より，$\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{8} = \boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

（**3**）　$\beta = \sqrt{2}-1$ とおく．（1）より，$y = \tan\theta$ が $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ で単調増加であることと合わせて，$f(x)$ の増減表は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

$$f(0) = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(t^2+1)'}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ \log(t^2+1)\ \Big]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2$$

$$f(\beta) = \beta\int_0^\beta \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^\beta \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$- \int_1^\beta \frac{t}{1+t^2}\,dt + \beta\int_1^\beta \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \beta f'(\beta) - \int_0^\beta \frac{t}{1+t^2}\,dt - \int_1^\beta \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ \log(t^2+1)\ \Big]_0^\beta - \frac{1}{2}\Big[\ \log(t^2+1)\ \Big]_1^\beta$$

$$= -\log(\beta^2+1) + \frac{1}{2}\log 2$$

$$= \log\sqrt{2} - \log(4-2\sqrt{2}) = \log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$f(1) = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

$f(0)$ と $f(1)$ の大小を比べると，$\dfrac{\pi}{4} \fallingdotseq 0.785$ であり，$0.69 < \log 2 < 0.7$ であることから

$$f(1)-f(0)=\frac{\pi}{4}-\log 2>0$$

したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は

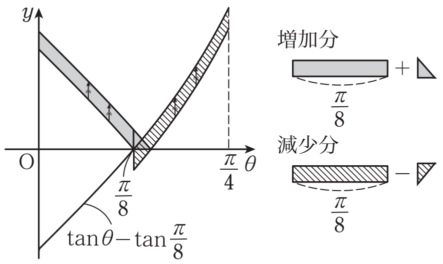
$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2}$，最小値は $\boldsymbol{\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$ である．

◆別解◆　**【はみ出し削り論法】**

実は計算をしなくても，最小値をとる x の値を求めることができる．$t=\tan\theta$ と置換すると，$dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ で，

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\tan\theta-x|\,d\theta$$

となる．



$x=\tan\dfrac{\pi}{8}=\beta$ から右に動いたとき，$f(x)$ の

増加部分＝網目部分 ……………………………①

減少部分＝斜線部分 ……………………………②

である．y 方向の幅は一定であるから，等積変形することができる．

これより，①＞② であるから，$x=\beta$ から右に動いたとき，$f(x)>f(\beta)$ である．同様に考えると，$x=\beta$ から左に動いたときも $f(x)>f(\beta)$ である．

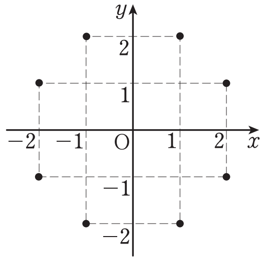
よって，$f(x)$ は $x=\beta=\sqrt{2}-1$ で最小値をとる．このような論法を「はみ出し削り論法」という．

（ホクソム　椎茸・Sakura）

3　数学B【確率と漸化式】標準

《事象を正しく把握せよ (C20)》

▶解答◀　（1）　とりうる点を図示すると，以下のようになる．



よって，Pがとりうる点の座標は

(1, 2), (−1, 2), (−2, 1), (−2, −1), (−1, −2), (1, −2), (2, −1), (2, 1)

（2）　1秒後には確率 $\dfrac{2}{3}$ で $(2, -1)$ または $(-2, 1)$ に，確率 $\dfrac{2}{6}$ で $(1, 2)$ または $(-1, -2)$ にある．これは，$(2, 1)$ と $(-2, -1)$ からみて対称な配置であるから，n 秒後において点 $(2, 1)$ にいる確率と $(-2, -1)$ は等しい．

（3）　$A=\{(2, 1), (-2, -1)\}$

$B=\{(-1, 2), (1, -2)\}$

$C=\{(1, 2), (-1, -2)\}$

$D=\{(-2, 1), (2, -1)\}$

とする．このとき，Pは奇数秒後には C または D に，偶数秒後には A または B にいるから，n が奇数のときPが点 $(2, 1)$ にいる確率は **0** である．Pが $n=2k$ 秒後に A, B にいる確率をそれぞれ a_{2k}, b_{2k} とすると，

$$a_{2k}+b_{2k}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

である．また，$2k+2$ 秒後に A にいるのは，$2k$ 秒後に A にいて，2度軸または2度 $y=\pm x$ に関して対称移動するか，$2k$ 秒後に B にいて，1度は軸，1度は $y=\pm x$ に関して対称移動するかのいずれかであるから，

$$a_{2k+2}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{6}\right)^2\right\}a_{2k}+2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{6}b_{2k}$$

$$a_{2k+2}=\frac{5}{9}a_{2k}+\frac{4}{9}b_{2k}$$

① を用いると

$$a_{2k+2}=\frac{5}{9}a_{2k}+\frac{4}{9}(1-a_{2k})=\frac{1}{9}a_{2k}+\frac{4}{9}$$

これより，$a_{2(k+1)}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{9}\left(a_{2k}-\dfrac{1}{2}\right)$ となり，数列 $\left\{a_{2k}-\dfrac{1}{2}\right\}$ は等比数列となるから，$a_0=1$ も合わせて

$$a_{2k}-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(a_0-\frac{1}{2}\right)$$

$$a_{2k}=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{9}\right)^k\right\}$$

となる．（2）より n 秒後に $(2, 1)$ にいる確率と $(-2, -1)$ にいる確率は等しいから，**n が偶数のとき** $\dfrac{1}{4}\left\{1+\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}$ である．

（ホクソム　椎茸・Sakura）

4　数学Ⅱ【関数の増減・極値】標準

《文字定数は分離せよ (B15)》

▶解答◀　（1）　$y=f(x)$ の $(t, f(t))$ における法線の方程式を考えると，$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ より

$$y=\frac{\sqrt{2}}{t}(x-t)+\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{t}x-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+3\sqrt{2}$$

これが円 C_t の中心 $(c(t),0)$ を通るので

$$0=\frac{\sqrt{2}}{t}c(t)-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+3\sqrt{2}$$

$$c(t)=\boldsymbol{\frac{1}{4}t^3-3t}$$

円 C_t の方程式は

$$(x-c(t))^2+y^2=\{r(t)\}^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

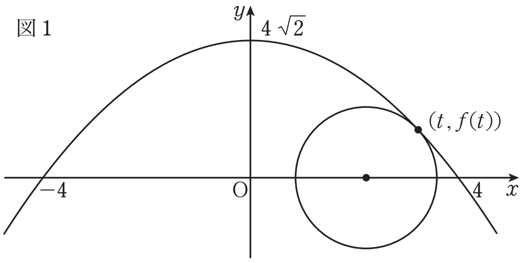
であり，これが $(t,\,f(t))$ を通ることから

$$\{r(t)\}^2=\left\{t-\left(\frac{1}{4}t^3-3t\right)\right\}^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)^2$$

$$=\left(-\frac{1}{4}t^3+4t\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{16}t^6-\frac{15}{8}t^4+12t^2+32}$$

図 1



（**2**）　円 C_t が $(3,\,a)$ を通ることから，① より

$$(3-c(t))^2+a^2=\{r(t)\}^2$$

$$a^2=\{r(t)\}^2-(3-c(t))^2$$

$$=\frac{1}{16}t^6-\frac{15}{8}t^4+12t^2+32-\left(3+3t-\frac{1}{4}t^3\right)^2$$

$$=-\frac{3}{8}t^4+\frac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23$$

ここで，$g(t)=-\dfrac{3}{8}t^4+\dfrac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23$ とおくと，求める t の個数は，$0<a<f(3)$ としたときの $y=a^2$ と $y=g(t)$ の共有点の個数である．

$$g'(t)=-\frac{3}{2}t^3+\frac{9}{2}t^2+6t-18$$

$$=-\frac{3}{2}(t^3-3t^2-4t+12)$$

$$=-\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)$$

これより，$g(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	$-$		
$g(t)$		↘		↗		↘	

$$g(0)=23,\ g(2)=-6+12+12-36+23=5,$$

$$g(3)=-\frac{243}{8}+\frac{81}{2}+27-54+23=\frac{49}{8},$$

$$g(4)=-96+96+48-72+23=-1$$

であるから，$y=g(t)$ のグラフは図 2 のようになる．

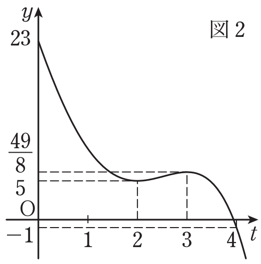


図 2

これより，$0<a<f(3)$ における $y=a^2$ と $y=g(t)$ の共有点の個数を考える．

$$f(3)=-\frac{9}{4}\sqrt{2}+4\sqrt{2}=\frac{7}{4}\sqrt{2}$$

より，$0<a^2<\dfrac{49}{8}$ であるから，$0<t<4$ の範囲での共有点の個数は

$0<a<\sqrt{5}$ のとき，1 個

$a=\sqrt{5}$ のとき，2 個

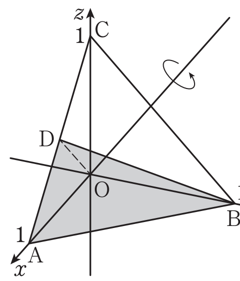
$\sqrt{5}<a<\dfrac{7}{4}\sqrt{2}$ のとき，3 個

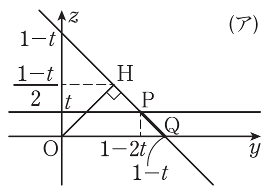
（ホクソム　椎茸・Sakura）

5　数学Ⅲ【体積】標 準

《$x=t$ で切る (B25)》

▶解答◀　平面 ABC の方程式は $x+y+z=1$ であり，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\,0,\,\dfrac{1}{2}\right)$ である．また，平面 OBD の方程式は $z=x$ である．yz 平面に平行な平面 $x=t$ における断面を考える．





（ア）　$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき：

$\dfrac{1}{2}(1-t)\geqq t$ である．

断面は図のような線分 PQ になる．この線分 PQ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる同心円で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とすると，$\mathrm{OP}\leqq\mathrm{OQ}$ より

$$S(t)=\pi(\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OP}^2)$$

$$=\pi\{(1-t)^2-((1-2t)^2+t^2)\}$$

$$=\pi(-4t^2+2t)$$

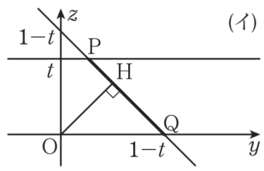
（イ）　$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき：

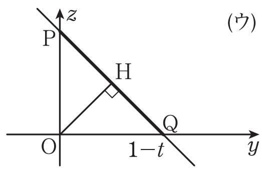
$$S(t)=\pi(\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OH}^2)$$

$$=\pi\left\{(1-t)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t)\right)^2\right\}$$

$= \dfrac{1}{2}\pi(1-t)^2$

（ウ）　$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき：





（イ）と同様に $S(t) = \dfrac{\pi}{2}(1-t)^2$

以上より，求める立体の体積 V は

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{3}} (-4t^2 + 2t)\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{2}(1-t)^2\,dt$$

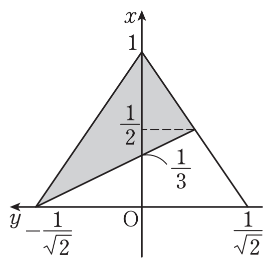
$$= \left[-\frac{4}{3}t^3 + t^2 \right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{1}{6}(1-t)^3 \right]_{\frac{1}{3}}^1$$

$$= \frac{5}{81} + \frac{4}{81} = \frac{1}{9}$$

よって，$V = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{9}}$ である．

♦別解♦　**【積分？場合分け？そんなもんしないよ】**

立式の過程からわかるように，ベクトル $(0, 1, 1)$ 方向の成分は無視できるから，三角形 ADB を平面 $z = -y$ に射影してできる図形を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積に等しい．これは，三角形 ADB を x 軸のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させたのち，xy 平面に射影した図形に等しく，それは，次図の網目部分である．



よって，この回転体は，底面の半径が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，高さが 1 の円錐から，底面の半径が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，高さが $\dfrac{1}{3}$ の円錐をひいたものになるから，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\pi\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\pi\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{9}}$$

（ホクソム　椎茸・Sakura）

6　数学A【整数問題の雑題】やや難
《素数の論証 (C40) ☆》

▶解答◀　（1）　$f(n) = n(n^2 + 10n + 20)$

これが素数となるとき，次の 2 通りがある．

【$n = \pm 1$ のとき】：

$f(1) = 31,\ f(-1) = -11$

となるから，$n = 1$ のみ適する．

【$n^2 + 10n + 20 = \pm 1$ のとき】：

$n^2 + 10n + 20 = 1$ のとき，$n^2 + 10n + 19 = 0$ は整数解を持たない．

$n^2 + 10n + 20 = -1$ を解くと，$n = -3, -7$ であり，$f(-3) = 3,\ f(-7) = 7$ となり，$n = -3, -7$ が適する．

よって，$n = \mathbf{1, -3, -7}$ である．

（2）　$g(n) = n(n^2 + an + b)$

【$n = \pm 1$ のとき】：

$g(1) = 1 + a + b$ ……………………①

$g(-1) = -(1 - a + b) = -1 + a - b$ ………②

【$n^2 + an + b = 1$ のとき】：

p を素数として，$n = p$ となるから

$p^2 + ap + (b-1) = 0$ ……………………③

【$n^2 + an + b = -1$ のとき】：

q を素数として $n = -q$ となるから

$q^2 - aq + (b+1) = 0$ ……………………④

まず，異なる素数 p, q に対して ③ と ④ が共に成立することがあるかどうかを考える．

$pa + b = 1 - p^2$ ……………………⑤

$-qa + b = -1 - q^2$ ……………………⑥

(⑤ − ⑥) ÷ $(p+q)$ より

$$a = \frac{2 - p^2 + q^2}{p+q} = \frac{2}{p+q} - (p-q)$$

となるが，$p + q \geqq 4$ より a は整数とならないから，異なる素数 p, q に対して ③ と ④ が共に成立することはない．これより，素数になる候補は「①，②，③ の異なる 2 つの正の解」，もしくは，「①，②，④ の異なる 2 つの正の解」である．

③ の解 p_1, p_2 がいずれも素数であったとすると，解と係数の関係より

$p_1 + p_2 = -a,\ p_1p_2 = b - 1$

であるから，

$② = -1 - (p_1 + p_2) - (p_1p_2 + 1)$

$= -(p_1 + 1)(p_2 + 1) - 1 < 0$

となるから，①，②，③ の異なる 2 つの正の解がすべて素数となることはない．

④ の解 q_1, q_2 がいずれも素数であったとすると，解と係数の関係より

$q_1 + q_2 = a,\ q_1q_2 = b + 1$

であるから，

$② = -1 + (q_1 + q_2) - (q_1q_2 - 1)$

$= -(q_1 - 1)(q_2 - 1) + 1 < 0$

となるから，①，②，④ の異なる 2 つの正の解がすべて素数となることもない．

よって，$g(n)$ が素数となるような n は高々 3 個である．

（ホクソム　椎茸・Sakura）

要の分析

()