《平均値の定理の応用》

1. (1) 不等式

$$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\frac{1}{48}$$

をみたす正の整数 m の最小値は $\boxed{}$ である．

(2) 不等式

$$\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^4-\left(\sqrt[3]{n}\right)^4>40$$

をみたす正の整数 n の最小値は $\boxed{}$ である．

（20　東京医大・医）

考え方　$f(b)-f(a)$ の形があるときには，平均値の定理の活用を考える．

▶解答◀　(1)（1）は解説を交えて書く．(2)は答案らしく書く．

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ $(x>0)$ とおく．平均値の定理により

$$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}=f(m+1)-f(m)$$
$$=(m+1-m)f'(c)=\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}}$$
$$(m<c<m+1) \quad\cdots\cdots①$$

となる c が存在する．

$\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}}<\frac{1}{48}$ を同値変形すると

$$\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}}<\frac{1}{48}\iff 16<c^{\frac{2}{3}}\iff 64<c \quad\cdots\cdots②$$

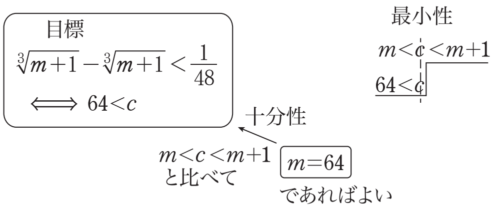
さて，①，② を見比べて c の左側が同じであればいいなということで $m=64$ とするのは，十分条件である．つまり，$m=64$ とすれば，① より $64<c<65$ となり，このとき ② から $\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}}<\frac{1}{48}$ になり，連続して書けば

$$\sqrt[3]{65}-\sqrt[3]{64}=\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}}<\frac{1}{48}$$

となる．

このままでは，m の一例を見つけただけで，m の最小性を論じたことにはならない．そこで，①，② の $64<c$ と $m<c<m+1$ を合わせて $64<c<m+1$ となるから $64<m+1$ より $63<m$ となる．すなわち，$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\frac{1}{48}$ となるためには $63<m$ となることが必要である．$64\leqq m$ である．$64\leqq m$ が必要で，前半の十分性により $m=64$ ならば確かに成り立つ．

求める m の最小値は **64** である．



(2) $g(x)=x^{\frac{4}{3}}$ $(x>0)$ とおく．平均値の定理により

$$\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^4-\left(\sqrt[3]{n}\right)^4=g(n+1)-g(n)$$
$$=(n+1-n)g'(c)=\frac{4}{3}c^{\frac{1}{3}}$$
$$(n<c<n+1) \quad\cdots\cdots③$$

となる c が存在する．

$$\frac{4}{3}c^{\frac{1}{3}}>40\iff c^{\frac{1}{3}}>30\iff 27000<c \quad\cdots\cdots④$$

$27000<c$ と $n<c<n+1$ を合わせて $27000<c<n+1$ となるから $26999<n$ となる．$27000\leqq n$ である．これは，必要条件である．逆に $n=27000$ であれば，③ により $27000<n<27001$ となり，④ は成り立つ．

求める n の最小値は **27000** である．

注意　**1°【言葉を正しく使え】**

大人でも，生徒の答案でも

$$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}=\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}}(m<c<m+1)$$

$\frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}}<\frac{1}{48}$ を解いて $64<c$ として，「これが成り立つには $m=64$」と書く人が大変多い．「これが成り立つためには，$m=64$ でなければならない」のか「$m=64$ であればよい」のか，どっちなのかをキチンと書かないのである．さらに自信がないのだろう，なぜか，皆，「ためには」と書かず「成り立つには」となる．「ためには」をキチンと書くこと，必要と十分の区別をキチンと書くこと，そして，何より，自分の「思考の方向性」を意識しよう．

2°【平均値の定理の注意】

平均値の定理は通常次のように習う．$a<b$ のとき，$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能のとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (a<c<b)$$

となる c が存在する．しかし，応用的な問題では，分母をはらった形

$f(b)-f(a)$ に対して

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)\ (a<c<b)$$

で使い，これを関数値の差があるときには，**関数値の差を近似する**目的で使うと認識しているとよい．

さらに「閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能」というのは，最低でもそうなっているようにということであって，大学入試の場合，基本，定義域は広く，大半は，$x>0$ や，実数全体で，微分可能である．大学入試の実戦的な問題で，微分不可能な点が

出てくるなどは，ありえない．それなのに，わざわざ「閉区間 $[m,\ m+1]$ で連続，開区間 $(m,\ m+1)$ で微分可能」と書くことになんの意味があろうか．

たとえば，$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $(x > 0)$ を微分するとき，「$f(x)$ は微分可能である」と明言してから微分するだろうか？そんなことは当たり前だとして．皆，何も言わないで微分するだろう．普段は何も言わないで微分するのに，平均値の定理を使うときだけそんなことを言うのは形式主義に過ぎるのではなかろうか？