1．放物線 $C : y = x^2$ 上を点 $\mathrm{P}(t, t^2)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ が動く．放物線 C の点 P における法線上に 2 点 Q と R を，点 P からの距離がともに $\dfrac{1}{2}t(1-t)\sqrt{1+4t^2}$ となるようにとる．ただし，点 Q は不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域に含まれるようにとり，点 R は不等式 $y \leqq x^2$ の表す領域に含まれるようにとる．

（1） 点 Q の座標を t の式で表せ．

（2） t が 0 から 1 まで変化するとき，点 Q が描く曲線と点 R が描く曲線で囲まれた部分の面積を求めよ．　（19　千葉大・医，理）

▶解答◀（1） $\mathrm{P}(t, t^2)$ を t で微分して $\vec{u} = (1, 2t)$ は P における接線の方向ベクトルである．$\vec{v} = (-2t, 1)$ は法線の方向ベクトルである．$\vec{v}$ は左上向きである．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \parallel \vec{v},\ |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \frac{1}{2}t(1-t)\sqrt{1+4t^2}$$

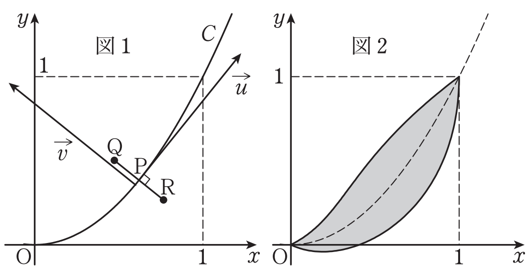
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{\frac{1}{2}t(1-t)\sqrt{1+4t^2}}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

$$= \frac{1}{2}t(1-t)(-2t, 1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (t, t^2) + \frac{1}{2}t(1-t)(-2t, 1)$$

$$= \left(t^3 - t^2 + t,\ \frac{1}{2}(t^2 + t)\right)$$

Q の座標は $\boldsymbol{\left(t^3 - t^2 + t,\ \frac{1}{2}(t^2 + t)\right)}$



（2） $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = -\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\frac{1}{2}t(1-t)(-2t, 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}} = (t, t^2) - \frac{1}{2}t(1-t)(-2t, 1)$$

$$= \left(-t^3 + t^2 + t,\ \frac{1}{2}(3t^2 - t)\right)$$

となる．点 Q について

$$x_Q = t^3 - t^2 + t,\ y_Q = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$$

とおくと $0 < t < 1$ において

$$x_Q{}' = 3t^2 - 2t + 1 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0$$

となり，x_Q は増加関数である．点 R について

$$x_R = -t^3 + t^2 + t,\ y_R = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$$

とおくと $0 < t < 1$ において

$$x_R{}' = -3t^2 + 2t + 1 = (3t+1)(1-t) > 0$$

となり，x_R は増加関数である．求める面積を S とする．

$x_Q = x$ とする．t と x の対応は 1 対 1 であり，t は x の関数として表すことができる．よって y_Q も x の関数として表すことができる．その具体的な形は使うわけではない．同じく $x_R = x$ とする．ここでも t は x の関数として表せて，y_R も x の関数として表すことができる．

$$S = \int_0^1 (y_Q - y_R)\,dx = \int_0^1 y_Q\,dx - \int_0^1 y_R\,dx$$

である．ここで

$$S_1 = \int_0^1 y_Q\,dx,\ S_2 = \int_0^1 y_R\,dx$$

とおく．

$$S_1 = \int_0^1 y_Q\,dx = \int_0^1 y_Q\,dx_Q = \int_0^1 y_Q \frac{dx_Q}{dt}\,dt$$

$$y_Q \frac{dx_Q}{dt} = \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right)(3t^2 - 2t + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(t - t^2 + t^3 + 3t^4)$$

同様に，

$$S_2 = \int_0^1 y_R \frac{dx_R}{dt}\,dt$$

$$y_R \frac{dx_R}{dt} = \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\right)(-3t^2 + 2t + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(-t + t^2 + 9t^3 - 9t^4)$$

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^1 \frac{1}{2}\{(t - t^2 + t^3 + 3t^4) - (-t + t^2 + 9t^3 - 9t^4)\}\,dt$$

$$= \int_0^1 (t - t^2 - 4t^3 + 6t^4)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1 + \frac{6}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{11}{30}}$$