《変わった 2 次関数 (C20)》

1. a, b, c を整数とし，2 次関数

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

を考える．ただし $a \neq 0$ である．$|x| \leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)| \leqq 1$ が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

（1） a, b, c を $f(1), f(-1), f(0)$ を用いて表せ．

（2） $f(x)$ をすべて求めよ．　(20　岡山大・文系)

考え方　「2 次関数の問題は平方完成」というのは，高校数学からすればとてもオーソドックスに見える．しかし，最初からそうすると，軸の位置で場合分けになって厄介である．こうした問題は，平方完成せず，特別な値をとって，それだけから調べるのが定石である．出題者は「まず，$f(1), f(-1), f(0)$ の値から考えよ」と言っている．

▶解答◀　（1） $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = a + b + c$ ……………………①

$f(-1) = a - b + c$ ……………………②

$f(0) = c$ ……………………③

(① + ②) ÷ 2 より

$$\frac{1}{2}\{f(1) + f(-1)\} = a + c$$

$$a = \boldsymbol{\frac{1}{2}\{f(1) + f(-1)\} - f(0)}$$

(① − ②) ÷ 2 より

$$b = \boldsymbol{\frac{1}{2}\{f(1) - f(-1)\}}$$

$$c = \boldsymbol{f(0)}$$

（2） $|x| \leqq 1$ で $|f(x)| \leqq 1$ となるためには $|f(1)| \leqq 1$, $|f(-1)| \leqq 1$, $|f(0)| \leqq 1$ となることが必要で，

$-1 \leqq a + b + c \leqq 1$ ……………………④

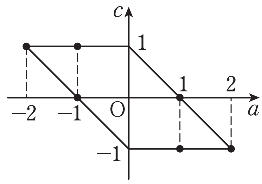
$-1 \leqq a - b + c \leqq 1$ ……………………⑤

$-1 \leqq c \leqq 1$ ……………………⑥

(④ + ⑤) ÷ 2 より

$-1 \leqq a + c \leqq 1$ ……………………⑦

⑥，⑦，$a \neq 0$ より，格子点 (a, c) は図の黒丸のいずれかである．



$a < 0$ のときは，$a > 0$ のときのグラフを上下逆にするだけであるから，$a > 0$ のときを考える．この場合

$$(a, c) = (1, 0), (2, -1), (1, -1)$$

のいずれかである．$(a, c) = (1, 0), (2, -1)$ の場合は $a + c = 1$ であるから ④，⑤ に代入し，右側だけを見て $1 + b \leqq 1$, $1 - b \leqq 1$ から $b \leqq 0$, $b \geqq 0$ となり $b = 0$ を得る．$(a, c) = (1, -1)$ の場合は ④，⑤ に入れても $-1 \leqq b \leqq 1$ を得る．$b = -1, 0, 1$ のいずれかで

$$f(x) = x^2 - x - 1,\ x^2 - 1,\ x^2 + x - 1$$

のいずれかとなる．

$f(x) = x^2 - x - 1$ のときは $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ で $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ となり，$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| > 1$ で不適．

$f(x) = x^2 + x - 1$ のときは $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ で $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ となり，不適．

以上より，$a > 0$ のとき，

$$f(x) = x^2,\ 2x^2 - 1,\ x^2 - 1$$

となる．このとき，$f(x)$ のグラフは図の 3 つのいずれかになり，確かに $-1 \leqq x \leqq 1$ で $|f(x)| \leqq 1$ になる．

$a < 0$ のときはグラフが上下逆になるだけである．

$$f(x) = \boldsymbol{\pm x^2,\ \pm(2x^2 - 1),\ \pm(x^2 - 1)}$$