3 （1） 自然数 n と実数 x $(0<x<\pi)$ に対して，次を示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(n+1)x}{2}$$

（2） 自然数 n と実数 x $(0<x<\pi)$ に対して，次を示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}>0$$

（20　東北大・理-AO）

3 数学III【関数の増減と極値】**難！**

考え方 （2） まず数学的帰納法による証明をする．それに合わせて（1）も帰納法で行う．

▶解答◀ （1）　$n=1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{1}\cos(kx)=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{2x}{2}$$

は成り立つ．2 以上の自然数 m に対して $n=m-1$ のとき成り立つとする．

$$\sum_{k=1}^{m-1}\cos(kx)=\frac{\sin\frac{(m-1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{mx}{2}\quad\cdots\cdots①$$

となる．これを利用して $n=m$ のときの式

$$\sum_{k=1}^{m}\cos(kx)=\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(m+1)x}{2}\quad\cdots\cdots②$$

を示すが，そのためには，② の右辺から ① の右辺を引いた式において

$$\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(m+1)x}{2}-\frac{\sin\frac{(m-1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{mx}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{mx}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

$$-\frac{\sin\left(\frac{m}{2}x-\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{mx}{2}$$

$\left(C=\cos\frac{m}{2}x,\ S=\sin\frac{m}{2}x,\ c=\cos\frac{x}{2},\ s=\sin\frac{x}{2}\right.$ とおいて展開すると$\left.\right)$

$$=\frac{S}{s}(Cc-Ss)-\frac{Sc-Cs}{s}C=C^2-S^2$$

$$=\cos^2\frac{m}{2}-\sin^2\frac{m}{2}x=\cos 2\cdot\frac{m}{2}x=\cos mx$$

であるから，① に $\cos mx$ を加えると ② になる．よって $n=m$ でも成り立つから数学的帰納法により証明された．

（2）　$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$

とおく．$0<x<\pi$ で $f_n(x)>0$ であることを数学的帰納法により証明する．

$f_1(x)=\sin x>0$ であるから $n=1$ で成り立つ．

2 以上の自然数 m に対して $n=m-1$ で成り立つとする．$f_{m-1}(x)>0$ である．

$$f_m{}'(x)=\sum_{k=1}^{m}\cos kx=\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(m+1)x}{2}$$

$f_m(x)$ の極値を与える x について，$\sin\frac{mx}{2}=0$ または $\cos\frac{(m+1)x}{2}=0$ である．前者については

$$\sin mx=2\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{mx}{2}=0$$

となる．後者については $\cos\frac{(m+1)x}{2}=0$ で，2 倍角の公式により

$$\cos(m+1)x=2\cos^2\frac{(m+1)x}{2}-1$$

となり，$\cos\frac{(m+1)x}{2}=0$ より $\cos(m+1)x=-1$ となる．これを加法定理で展開すると

$$\cos mx\cos x-\sin mx\sin x=-1$$

$$\sin mx=\frac{1+\cos mx\cos x}{\sin x}\geqq 0$$

となる．なお $|\cos mx\cos x|\leqq 1$ であるから $1+\cos mx\cos x\geqq 0$ である．いずれにしても

$$f_m(x)=f_{m-1}(x)+\frac{\sin mx}{m}\geqq f_{m-1}(x)>0$$

となり，$n=m$ で成り立つ．数学的帰納法により証明された．

注意 1°【（1）の直接証明】

$$2\sin\frac{x}{2}\cos(kx)$$

$$=\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(kx-\frac{x}{2}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

$$\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos(kx)$$

$$=\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{x}{2}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{n}{2}x+\frac{x}{2}+\frac{n}{2}x\right)$$

$$-\sin\left(\frac{n}{2}x+\frac{x}{2}-\frac{n}{2}x\right)$$

$$=2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}$$

となる．これを $2\sin\dfrac{x}{2}$ で割ると証明すべき式となる．

なお，$d_k=\sin\dfrac{2k-1}{2}x$ とおくと Ⓐ は

$$2\sin\frac{x}{2}\cos(kx)=d_{k+1}-d_k$$

の形であり，ここで $k=1,\,2,\,\cdots,\,n$ とした式を辺ごとに加えると

$$\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos(kx)=d_{n+1}-d_1$$

となる．

$$\begin{array}{l}\cancel{d_2}-d_1\\ \cancel{d_3}-\cancel{d_2}\\ \cancel{d_4}-\cancel{d_3}\\ \quad\vdots\\ d_{n+1}-\cancel{d_n}\end{array}$$

2°【直接証明について】

今度は直接証明をしてみる．（２）では $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ だけでなく，$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ も必要になるから，まとめてできる複素数を利用する．

極値を与える x の値は求められるだろう．極値の計算はシグマの式に代入する．数列の和と各項の関係で

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

がある．この利用を図る．それも，一度ならず，二度までも！

式番号は１から振り直す．

◆別解◆ （１） $w=\cos x+i\sin x$ とおく．

$W=\sum\limits_{k=1}^{n}w^k$ とおく．

$$W=\sum_{k=1}^{n}(\cos kx+i\sin kx)\ \cdots\cdots①$$

であり，一方

$$W=w\cdot\frac{1-w^n}{1-w}$$

$\alpha=\cos\dfrac{x}{2}+i\sin\dfrac{x}{2}$ とする．$w=\alpha^2$ である．

$$W=\alpha^2\cdot\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}=\alpha^2\cdot\frac{(\alpha\overline{\alpha})^n-\alpha^{2n}}{\alpha\overline{\alpha}-\alpha^2}$$

$$=\frac{\overline{\alpha^n}-\alpha^n}{\overline{\alpha}-\alpha}\cdot\frac{\alpha^2\cdot\alpha^n}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha^n}-\alpha^n}{\overline{\alpha}-\alpha}\alpha^{n+1}$$

$\alpha^n=\cos\dfrac{nx}{2}+i\sin\dfrac{nx}{2}$,

$\overline{\alpha^n}=\cos\dfrac{nx}{2}-i\sin\dfrac{nx}{2}$,

$\overline{\alpha}=\cos\dfrac{x}{2}-i\sin\dfrac{x}{2}$ であるから

$$W=\frac{-2i\sin\frac{nx}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}\alpha^{n+1}$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{(n+1)x}{2}+i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right)\ \cdots②$$

①，② の実部と虚部を比べて

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(n+1)x}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(n+1)x}{2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

（２） $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(kx)}{k}$ とおく．

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(n+1)x}{2}$$

$\sin\dfrac{nx}{2}=0$ の解について $\dfrac{nx}{2}=j\pi$ とおける．ただし $x=\dfrac{2j}{n}\pi$ が $0<x<\pi$ にあるのは $0<j<\dfrac{n}{2}$ のときであるから j は $1\leqq j\leqq\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ を満たす自然数である．$[x]$ はガウス記号である．

$\cos\dfrac{(n+1)x}{2}=0$ の解について $\dfrac{(n+1)x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+l\pi$ とおける．ただし $x=\dfrac{2l+1}{n+1}\pi$ が $0<x<\pi$ にあるのは $0\leqq l<\dfrac{n}{2}$ のときであるから l は $0\leqq l\leqq\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ を満たす整数である．

$$\frac{2j-1}{n+1}<\frac{2j}{n}<\frac{2j+1}{n+1}\iff -n<2j<n$$

であり，これは成り立つ．

$f'(0)=n$ であるから，$x=0$ の近くでは増加する．

$f'(x)=0$ の解は

$$\frac{1}{n+1}\pi<\frac{2}{n}\pi<\frac{3}{n+1}\pi<\frac{4}{n}\pi<\cdots$$

と並ぶ．これらで，順に，極大，極小，極大，極小，$\cdots$ を繰り返す．$x=\dfrac{2j}{n}\pi$ で極小になる．

$$a_k=\sin\left(k\cdot\frac{2j}{n}\pi\right),\ b_k=\frac{1}{k}$$

とおく．$f(x)$ の極小値は

$$f\left(\frac{2j}{n}\pi\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\left(k\cdot\frac{2j}{n}\pi\right)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

である．$L=f\left(\dfrac{2j}{n}\pi\right)$ とおく．

ここで $S_k=\sum\limits_{m=1}^{k}a_m$ とおく．$S_1=a_1$ であり，$k\geqq 2$ のとき $a_k=S_k-S_{k-1}$ である．

n が小さいときには後のシグマで少し困る点が出てくるから別扱いする．

$n=1$ のときは $f(x)=\sin x>0$

$n=2$ のとき

$$f(x)=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}$$

$$=\sin x+\sin x\cos x=\sin x(1+\cos x)>0$$

以下は $n \geqq 3$ のときを考える．

$$L = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k b_k$$
$$= S_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k$$
$$= S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + (S_3 - S_2) b_3 + \cdots + (S_n - S_{n-1}) b_n$$
$$= S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n$$

$x = \dfrac{2j}{n}\pi$ のとき ③ は 0 になるが，④ も 0 になる．すなわち，$x = \dfrac{2j}{n}\pi$ に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = 0$$

である（ただし，いまは n を 2 以上の 1 つの値に固定しているから $S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0,\ \cdots$ というわけではなく，無茶苦茶をしないように注意が必要である）．

$$L = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$$

となる．$c_k = b_k - b_{k+1}$ とおく．

$$c_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

は減少数列である．

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_{n-1} > 0$$
$$L = \sum_{k=1}^{n-1} S_k c_k$$

$S_k < 0$ になることがあるかもしれないから，このままでは，まだ，うまくいかない．もう 1 回，今の手順を繰り返す．

これからさらに $T_k = \sum_{m=1}^{k} S_m$ とおく．

$$S_1 = T_1,\ S_k = T_k - T_{k-1}\ (2 \leqq k \leqq n-1)$$
$$L = \sum_{k=1}^{n-1} S_k c_k$$
$$= T_1 c_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (T_k - T_{k-1}) c_k$$
$$= T_1 c_1 + (T_2 - T_1) c_2 + (T_3 - T_2) c_3 + \cdots + (T_{n-1} - T_{n-2}) c_{n-1}$$
$$= T_1(c_1 - c_2) + T_2(c_2 - c_3) + \cdots + T_{n-2}(c_{n-2} - c_{n-1}) + T_{n-1} c_{n-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-2} T_k (c_k - c_{k+1}) + T_{n-1} c_{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{⑤}$$

となる．

$$T_1 = S_1 = a_1 = \sin\left(\frac{2j}{n}\pi\right) > 0$$

ここで $0 < 2j \leqq n-1 < n$ であることに注意せよ．

x の中に $x = \dfrac{2j}{n}\pi$ と n が入りこんでいるから，S_n の n と被らないように文字を変える．以下の x は $x = \dfrac{2j}{n}\pi$ である．

$$S_l = \frac{\sin \frac{lx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{(l+1)x}{2}$$

$$S_{l+1} = \frac{\sin \frac{(l+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{(l+2)x}{2}$$

これらを加えると

$$\sin \frac{lx}{2} + \sin \frac{(l+2)x}{2}$$
$$= \sin\left(\frac{l+1}{2}x - \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{l+1}{2}x + \frac{x}{2}\right)$$
$$= 2\sin \frac{(l+1)x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

であるから，任意の自然数 l に対して

$$S_l + S_{l+1} = \frac{2\sin^2 \frac{(l+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \geqq 0$$

である．$0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であることに注意せよ．

$$T_1 = S_1 > 0$$
$$T_2 = S_1 + S_2 \geqq 0$$
$$T_3 = S_1 + (S_2 + S_3) > 0$$
$$T_4 = (S_1 + S_2) + (S_3 + S_4) \geqq 0$$

となり，以下同様に，$T_k \geqq 0\ (2 \leqq k \leqq n-1)$ である．ゆえに ⑤ より $L > 0$ である．$f(x)$ のすべての極小値が正であり，$f(0) = f(\pi) = 0$ であるから $0 < x < \pi$ では $f(x) > 0$ である．

注意 3°【分母の虚数化】

$w = \cos x + i \sin x$ に対して $\dfrac{1}{1-w}$ があるときに，高校では，分母分子に $1 - \overline{w}$ を掛けるのが一般的である．しかし，それをすると，少し，計算が長引く．複素関数論（大学の複素数の理論）では

$\overline{\alpha} = \cos \dfrac{x}{2} - i \sin \dfrac{x}{2}$ を掛けるのが一般的である．

大学では，オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

と呼ばれる表記を用いる．以下では，指数法則

$$e^{-\frac{ix}{2}} e^{ix} = e^{-\frac{ix}{2} + ix} = e^{\frac{ix}{2}}$$

および

$$e^{\frac{ix}{2}} = \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}$$
$$e^{-\frac{ix}{2}} = \cos \frac{x}{2} - i \sin \frac{x}{2}$$

を用いる．

$$\frac{1}{1-w}=\frac{1}{1-e^{ix}}=\frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}}$$
$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-i\sin\frac{x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}$$

と，分母の虚数化をすると，

$$=\frac{1}{2}-\frac{\cos\frac{x}{2}}{2i\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{i\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

となって，結局は分母の実数化をすることになる．W の場合は少し違っていて

$$W=e^{ix}\cdot\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=e^{ix}\cdot\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\cdot\frac{e^{-\frac{inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}}$$
$$=e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\cdot\frac{-2i\sin\frac{nx}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n+1}{2}x+i\sin\frac{n+1}{2}x\right)$$

オイラーの公式を使うとスッキリする．解答は，これを踏まえてはいるが，オイラーの公式を明示的には使わないように書いた．

4°【半角で書く】

$$\frac{1}{1-w}=\frac{1}{1-\cos x-i\sin x}$$
$$=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}-2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)$$

という変形もある．

なお，この難問の前に，ほとんど意味がないが，$n=5$ のとき，$f(x)$ のグラフは図のようになる．