《2次関数の解を見る (B20)》

33. 実数 a, k に対し，次の x に関する方程式

$$ax^2+(2k+1)x+k=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える．以下の問に答えなさい．

（1） 方程式①が実数解をもつための必要十分条件を a, k を用いて表しなさい．

（2） 方程式①が任意の実数 k に対して実数解をもつための a の値の範囲を求めなさい．

（3） 方程式①が任意の自然数 k に対して実数解をもつための a の値の範囲を求めなさい．

（20 兵庫県立大・社会情報，国際商経）

▶解答◀ （1）（ア） $a=0$ のとき①は

$$(2k+1)x=-k \quad \cdots\cdots ②$$

となる．$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき②は成立しないから，解をもたない．$k\neq-\dfrac{1}{2}$ のときは $x=-\dfrac{k}{2k+1}$ を解にもつ．

（イ） $a\neq0$ のとき①は2次方程式となる．①の判別式を D_1 とおくと

$$D_1=(2k+1)^2-4ak$$

実数解をもつ条件は $D_1\geqq0$ であるから

$$(2k+1)^2-4ak\geqq0 \quad \cdots\cdots ③$$

である．

（ア），（イ）から，求める条件は $\boldsymbol{\left(a=0 \text{ かつ } k\neq-\frac{1}{2}\right)}$ **または** $\boldsymbol{(a\neq0 \text{ かつ } (2k+1)^2-4ak\geqq0)}$ である．

（2）（ア）（1）より，$a=0$ のときは，$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき解をもたないから不適である．

（イ） $a\neq0$ のとき③より

$$4k^2+4(1-a)k+1\geqq0 \quad \cdots\cdots ④$$

2次方程式 $4k^2+4(1-a)k+1=0$ の判別式を D_2 とおくと

$$\frac{D_2}{4}=\{2(1-a)\}^2-4\cdot1=4a(a-2)$$

④が任意の実数 k に対して成り立つ条件は $D_2\leqq0$ であるから，$a\neq0$ とあわせて，$0<a\leqq2$ である．

（ア），（イ）から，求める範囲は $\boldsymbol{0<a\leqq2}$ である．

（3）（ア）（1）より，①は $a=0$ のときは任意の自然数 k に対して実数解をもつ．

（イ） $a\neq0$ のとき，③より

$$a\leqq k+1+\frac{1}{4k} \quad \cdots\cdots ⑤$$

である．$f(k)=k+1+\dfrac{1}{4k}$ とおくと

$$f(1)=\frac{9}{4}$$

$$f(k+1)-f(k)=k+2+\frac{1}{4(k+1)}$$
$$-\left(k+1+\frac{1}{4k}\right)=\frac{4k(k+1)-1}{4k(k+1)}>0$$

となり，$f(k)$ は増加関数で，その最小値は $f(1)=\dfrac{9}{4}$ である．よって，⑤が任意の自然数 k に対して成り立つ条件は $a\leqq\dfrac{9}{4}$, $a\neq0$ である．

（ア），（イ）から，求める範囲は $\boldsymbol{a\leqq\dfrac{9}{4}}$ である．

◆別解◆ （2）（イ）は平方完成して解いてもよい．

$g(k)=4k^2+4(1-a)k+1$ とおくと

$$g(k)=4\{k^2-(a-1)k\}+1$$
$$=4\left\{\left(k-\frac{a-1}{2}\right)^2-\frac{(a-1)^2}{4}\right\}+1$$
$$=4\left(k-\frac{a-1}{2}\right)^2-a(a-2)$$

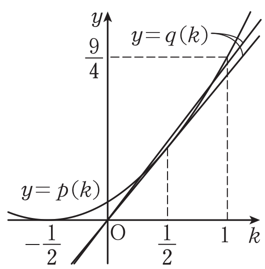
任意の実数 k に対して $g(k)\geqq0$ となる条件は

$$a(a-2)\leqq0$$

$a\neq0$ であるから，$\boldsymbol{0<a\leqq2}$ である．

（3）（イ）は，2次関数と直線の関係として解くこともできる．③より

$$(2k+1)^2\geqq4ak$$



$p(k)=(2k+1)^2$, $q(k)=4ak$ とする．2つのグラフが第一象限で接するのは，$y=q(k)$ の傾きが正のときであるから，（2）（イ）より，それは $a=2$ のときである．接点の k 座標は $k=-\dfrac{4(1-a)}{2\cdot4}=\dfrac{1}{2}$ であるから，$a>2$ のとき2つのグラフは $k<\dfrac{1}{2}$, $k>\dfrac{1}{2}$ の2箇所で交わることがわかる．任意の自然数 k に対して $p(k)\geqq q(k)$ となるのは，2つのグラフが共有点をもたないか，もったとしても共有点の k 座標が1以下となるときであるから，$p(1)\geqq q(1)$ すなわち，$\boldsymbol{a\leqq\dfrac{9}{4}}$ のときである．