国際医療福祉大学・医学部

試験日　2021年1月20日　時間80分　数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B(数列，ベクトル)

1 （1） 方程式 $|2x+3|=5$ の実数解は，$x=\square$ である．

方程式 $|x+2|+|x-3|=7$ の実数解は，$x=\square$ である．

（2） a を実数の定数とし，x の2次方程式

$x^2-2ax+2a^2-a-6=0$ ……………………………………（＊）

について考える．

（＊）が異なる2つの実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲は，$\square<a<\square$ である．

（＊）が異なる2つの正の解をもつとき，a のとり得る値の範囲は，$\square<a<\square$ である．

（3） $(x+3)^{10}$ の展開式における x^8 の係数は $\square$ である．

$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^{12}$ の展開式における x^{10} の係数は $\square$ である．

（4） xy 平面上に，点 A(3, 6) と，放物線 $C:y=x^2+4x-3$ がある．C 上の点 P の x 座標を t（t は実数）とし，線分 AP を 1 : 2 に内分する点 Q の座標を (X, Y) とすると，

$$X=\frac{t+\square}{\square},\ Y=\frac{t^2+\square t+\square}{\square}$$

である．よって，点 P が C 上を動くときの Q の軌跡の方程式は，

$$y=\square x^2-\square x+\square$$

である．

2 表と裏が同じ確率で出る1枚のコインがある．このコインを投げる試行を繰り返し行う．4回連続して表が出たら，試行を終了する．

（1） コインをちょうど4回投げて試行を終了する確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

コインをちょうど5回投げて試行を終了する確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

コインをちょうど6回投げて試行を終了する確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） コインをちょうど8回投げて試行を終了する確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

コインをちょうど8回投げて試行を終了したとき，表が出た回数がちょうど5回である条件付き確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（3） コインをちょうど9回投げて試行を終了する確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

コインを10回以上投げる確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

3 台形OABCにおいて，OA $=5$, AB $=9$, OC $=4$, OC // AB とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

（1） $\cos\angle\mathrm{AOC}=-\dfrac{1}{4}$ とする．

（i） $\vec{a}\cdot\vec{c}=\square$ である．

（ii）三角形OACの面積は $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

（iii）$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\dfrac{\square}{\square}\vec{c}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\square$ である．

（2）（i）$\vec{a}\cdot\vec{c}=-4$ のとき，辺BCの長さは $\square\sqrt{\square}$ である．

（ii）辺BCを $1:4$ に内分する点をP，線分APと線分OBの交点をQとする．$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QP}}=\dfrac{\square}{\square}$，$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QB}}=\dfrac{\square}{\square}$

であるから，三角形OPQの面積は，三角形ABQの面積の $\dfrac{\square}{\square}$ 倍である．

4　関数 $f(x)=4\sin^4 x-2\sin^2 x+1$ がある．

（1）$0<x<\pi$ とする．$f(x)$ は，$x=\dfrac{\pi}{\square}$ で極大値 $\square$，$x=\dfrac{\pi}{\square}$，$\dfrac{\square}{\square}\pi$ で極小値 $\dfrac{\square}{\square}$ をとる．

（2）$f(x)$ の不定積分を求めると，$\displaystyle\int f(x)\,dx=\frac{1}{\square}\sin 4x-\frac{1}{\square}\sin 2x+\frac{\square}{\square}x+C$（$C$ は積分定数）である．

（3）曲線 $y=f(x)$，x 軸および，2直線 $x=t-\dfrac{\pi}{8}$，$x=t+\dfrac{\pi}{8}$（t は実数の定数）によって囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．

$$S(t)=\frac{1}{\square}\cos 4t-\frac{\sqrt{\square}}{\square}\cos 2t+\frac{\square}{\square}\pi$$

である．t が $0\leqq t\leqq\pi$ の範囲を動くとする．$S(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{\square}$，$\dfrac{\square}{\square}\pi$ のとき，最小値 $\dfrac{\square}{\square}+\dfrac{\square}{\square}\pi$ をとる．

1

（1）数学I【1次方程式】標 準

▶解答◀　（i）$|2x+3|=5$

$2x+3=\pm 5$　　$\therefore\ x=\mathbf{-4,\ 1}$

（ii）$|x+2|+|x-3|=7$ ……①

（ア）$x\geqq 3$ のとき．

$x+2+x-3=7$

$2x=8$　　$\therefore\ x=4$

これは $x\geqq 3$ を満たす．

（イ）$-2\leqq x\leqq 3$ のとき．

①の左辺は $x+2-(x-3)=5$ であるから①を満たす x は存在しない．

（ウ）$x\leqq -2$ のとき．

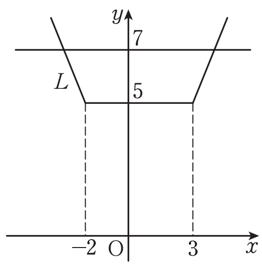
$-(x+2)-(x-3)=7$　　$\therefore\ x=-3$

これは $x\leqq -2$ を満たす．

（ア），（イ），（ウ）より $x=\mathbf{4,\ -3}$

注意　$y=|x+2|+|x-3|$ ……②

とする．$x=-2$ のとき $y=5$，$x=3$ のとき $y=5$ だから②のグラフは図の折れ線 L になる．したがって方程式①の解は $x<-2$ の範囲と $x>3$ の範囲にそれぞれ1つずつあることが分かる．



（2）数学II【解と係数の関係】標 準

▶解答◀　方程式 $x^2-2ax+2a^2-a-6=0$ の判別式を D とする．

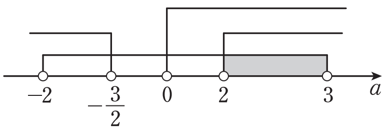
$$\frac{D}{4}=a^2-(2a^2-a-6)$$
$$=-(a^2-a-6)=-(a-3)(a+2)>0$$
$$\boldsymbol{-2<a<3}\ \cdots\cdots①$$

方程式の解を $x=\alpha,\beta$ とおく．①のもとで，$\alpha>0$ かつ $\beta>0$ になる条件は $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$ である．解と係数の関係より $2a>0$ かつ $2a^2-a-6>0$ とな

る．$a>0$ かつ $(2a+3)(a-2)>0$ となり，$a>0$ のとき $2a+3>0$ であるから $a>2$ となる．① と合わせて

$\mathbf{2<a<3}$

不等式がいくつかあるときには，部分部分を組み合わせて少しずつ整理した方がよい．皆まとめて図示するのが好きな人のために図示をしておく．



（3） 数学Ⅱ【二項定理】基本

▶解答◀ （ｉ） ${}_{10}\mathrm{C}_8\cdot1^8\cdot3^2=\mathbf{405}$

（ⅱ） 展開式の一般項は

$${}_{12}\mathrm{C}_k x^k\left(-\frac{2}{x}\right)^{12-k}={}_{12}\mathrm{C}_k(-2)^{12-k}x^{2k-12}$$

であるから，$2k-12=10$ のとき $k=11$ である．x^{10} の係数は

$${}_{12}\mathrm{C}_{11}\cdot(-2)^1=\mathbf{-24}$$

（4） 数学Ⅱ【軌跡】標準

▶解答◀ $\mathrm{P}(t,\ t^2+4t-3)$, $\mathrm{A}(3,\ 6)$

$$X=\frac{t+6}{3}\ \cdots\cdots\text{①}$$

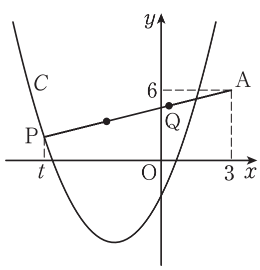
$$Y=\frac{t^2+4t-3+12}{3}=\frac{t^2+4t+9}{3}\ \cdots\cdots\text{②}$$

① より $t=3X-6$ で，これを $Y=\frac{1}{3}\{(t+2)^2+5\}$ に代入して

$$Y=\frac{1}{3}\{(3X-4)^2+5\}$$

$X,\ Y$ を小文字に変更して

$$y=\mathbf{3x^2-8x+7}$$



2

数学A【独立試行・反復試行の確率】標準

▶解答◀ 設問が連続して書いてあると解答原稿が書きにくい．各空欄を（ｉ）等の小設問として答えていく．表が出ることを○，裏が出ることを×，どちらが出てもよいことを△で表すことにする．

（1）（ｉ） ○○○○となる確率だから $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{1}{16}}$

（ⅱ） ×○○○○となる確率だから $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{1}{32}}$

（ⅲ） △×○○○○となる確率だから

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{1}{32}}$$

（2）（ｉ） 8 回目に試行が終わるのは

△△△×○○○○

となるときだから，求める確率は $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{1}{32}}$

（ⅱ） 8 回目に試行が終わったとする．最後の 5 回は×○○○○である．時間を遡ってみると最初の 3 回で○が 1 つ，×が 2 つ出ている確率は $\mathbf{\frac{3}{8}}$ である．

（3）（ｉ） 9 回目に試行が終わるのは

□□□□×○○○○

のうちで，□□□□が○○○○以外の列のときである．求める確率は

$$\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{15}{512}}$$

（ⅱ） 「10 回以上試行する」の余事象は「試行が 9 回以下で終わる」である．

4 回　○○○○ $\cdots\ \frac{1}{16}$

5 回　×○○○○ $\cdots\ \frac{1}{32}$

6 回　△×○○○○ $\cdots\ \frac{1}{32}$

7 回　△△×○○○○ $\cdots\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{32}$

8 回　△△△×○○○○ $\cdots\ \frac{1}{32}$

9 回　□□□□×○○○○ $\cdots\ \frac{15}{512}$

求める確率は

$$1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{15}{512}\right)=\mathbf{\frac{401}{512}}$$

♦別解♦ （2）（ⅱ） 事象 A を「8 回目で試行が終わる」，事象 B を「5 回表が出る」こととする．（2）（ｉ）より $P(A)=\frac{1}{32}$ である．$A\cap B$ は

○×××○○○○

×○××○○○○

××○×○○○○

の 3 通りあるから

$$P(A\cap B)=\frac{3}{2^8}=\frac{3}{256}$$

求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{256}}{\frac{1}{32}}=\mathbf{\frac{3}{8}}$$

3 数学B【ベクトルと図形（平面）】標準

▶解答◀　（1）（i）

$\vec{a}\cdot\vec{c}=5\cdot4\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\mathbf{-5}$

（ii）$\sin\angle\mathrm{AOC}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{15}}{2}}$

（iii）$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\vec{a}+\dfrac{9}{4}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}$

$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\dfrac{9}{4}|\vec{c}|^2=-5+36=\mathbf{31}$

図1

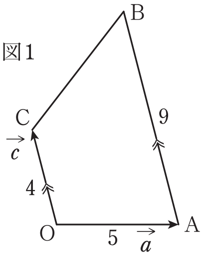
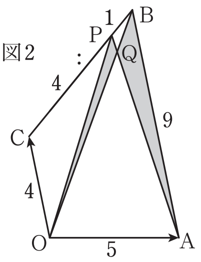


図2



（2）（i）$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\vec{c}-\vec{a}-\dfrac{9}{4}\vec{c}=-\vec{a}-\dfrac{5}{4}\vec{c}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=\left|\vec{a}+\dfrac{5}{4}\vec{c}\right|^2$

$=|\vec{a}|^2+\dfrac{25}{16}|\vec{c}|^2+\dfrac{5}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}$

$=25+25-10=40$

$\mathrm{BC}=\boldsymbol{2\sqrt{10}}$

（ii）$\mathrm{OQ}:\mathrm{QB}=t:(1-t)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t\vec{a}+\dfrac{9}{4}t\vec{c}$ ……………①

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$=\vec{c}+\dfrac{4}{5}\left(\vec{a}+\dfrac{5}{4}\vec{c}\right)=\dfrac{4}{5}\vec{a}+2\vec{c}$

$\mathrm{AQ}:\mathrm{QP}=s:(1-s)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=s\left(\dfrac{4}{5}\vec{a}+2\vec{c}\right)+(1-s)\vec{a}$

$=\left(1-\dfrac{1}{5}s\right)\vec{a}+2s\vec{c}$ ……………②

① と ② を係数比較して

$t=1-\dfrac{1}{5}s$ ……………③

$\dfrac{9}{4}t=2s$ ……………④

③×10＋④ より

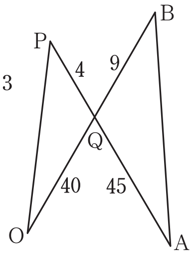
$\dfrac{49}{4}t=10\qquad\therefore\quad t=\dfrac{40}{49}$

④ に代入して

$\dfrac{90}{49}=2s\qquad\therefore\quad s=\dfrac{45}{49}$

$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QP}}=\boldsymbol{\dfrac{45}{4}},\ \dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QB}}=\boldsymbol{\dfrac{40}{9}}$

図3



$\triangle\mathrm{OPQ}:\triangle\mathrm{ABQ}=4\cdot40:9\cdot45=32:81$

$\triangle\mathrm{OPQ}=\boldsymbol{\dfrac{32}{81}}\triangle\mathrm{ABQ}$

4 数学Ⅲ【微積分の融合】標準

▶解答◀　（1）$s=\sin x,\ c=\cos x$ とおく．

$f(x)=4s^4-2s^2+1$

$f'(x)=16s^3c-4sc=4sc(4s^2-1)$

$=4sc(2s-1)(2s+1)$

$f'(x)=0$ のとき

$\sin x=0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \cos x=0$

$0<x<\pi$ の区間において

$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{\pi}{2}$

x	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	π
$f'(x)$		−	0	＋	0	−	0	＋	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

$x=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ のとき極大値 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4-2+1=\mathbf{3}$ をとる．

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1=\dfrac{3}{4}$

$f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1=\dfrac{3}{4}$

であるから $x=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}},\ \boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi}$ のとき極小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$ をとる．

（2）$f(x)=4\sin^4x-2\sin^2x+1$

$=4\left(\dfrac{1-\cos2x}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{1-\cos2x}{2}+1$

$=1-2\cos2x+\cos^22x-1+\cos2x+1$

$=\cos^22x-\cos2x+1$

$=\dfrac{1+\cos4x}{2}-\cos2x+1$

$=\dfrac{1}{2}\cos4x-\cos2x+\dfrac{3}{2}$

$\displaystyle\int f(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{8}}\sin4x-\boldsymbol{\frac{1}{2}}\sin2x+\boldsymbol{\frac{3}{2}}x+C$

(3)　$f(x)=4\left(s^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ であるから求める面積は

$$S(t)=\int_{t-\frac{\pi}{8}}^{t+\frac{\pi}{8}} f(x)\,dx$$

$$=\left[\ \frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}x\ \right]_{t-\frac{\pi}{8}}^{t+\frac{\pi}{8}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\sin\left(4t+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(4t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{8}(\cos 4t+\cos 4t)-\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2t\sin\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\cos 4t-\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cos 2t+\boldsymbol{\frac{3}{8}}\pi$$

$$=\frac{1}{4}(2\cos^2 2t-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t+\frac{3}{8}\pi$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 2t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t+\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{4}$$

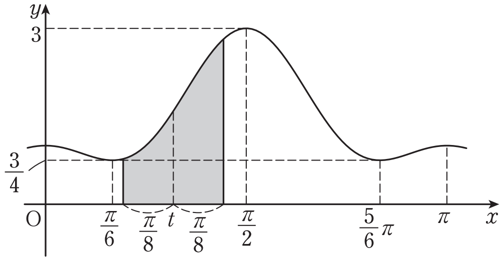
$$=\frac{1}{2}\left(\cos 2t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{2}$$

$\cos 2t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$0<t<\pi$ において

$$2t=\frac{\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\qquad\therefore\quad t=\frac{\pi}{8},\ \frac{7\pi}{8}$$

よって $S(t)$ は $t=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}},\ \boldsymbol{\frac{7}{8}}\pi$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{-1}{2}}+\boldsymbol{\frac{3}{8}}\pi$ をとる.

なお，$S(t)$ は図の網目部分の面積である.



要の分析　数 I から数 III まで偏りなく出題されている．医学部の入試問題としてはかなり易しいレベルである.

（茅嶋，石田颯，安田亨）