（2） 赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある．よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す．この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ．ただし n は 4 以上の整数とする．（21　京大・前期）

（2） 数学A【確率の雑題】標 準

▶解答◀ $a=\dfrac{3}{4}, b=\dfrac{2}{4}, c=\dfrac{1}{4}$ とおく．題意のようになるのは，$n-1$ 回の試行で，白玉，青玉，黄玉をすべて少なくとも 1 回取り出し，かつ，n 回目に赤玉を取り出すときである．$n-1$ 回とも白玉，青玉，黄玉のいずれかを取り出すという事象を U（確率 a^{n-1}），$n-1$ 回の試行で白玉と赤玉を取り出さないという事象を W（$n-1$ 回とも青玉か黄玉を取り出すという事象で，その確率は b^{n-1}），$n-1$ 回の試行で青玉と赤玉を取り出さないという事象を B，$n-1$ 回の試行で黄玉と赤玉を取り出さないという事象を Y とする．$P(W\cap B)$ は $n-1$ 回とも黄玉を取り出す確率で c^{n-1} である．$P(W\cap B\cap Y)=0$ である．

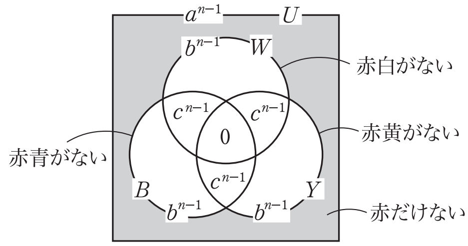
$$\begin{aligned}P(W\cup B\cup Y)&=P(W)+P(B)+P(Y)\\&\quad -P(W\cap B)-P(B\cap Y)-P(Y\cap W)\\&\quad +P(W\cap B\cap Y)\\&=3b^{n-1}-3c^{n-1}\end{aligned}$$

$n-1$ 回で，白玉，青玉，黄玉をすべて少なくとも 1 回取り出す確率は

$$P(U)-P(W\cup B\cup Y)=a^{n-1}-3b^{n-1}+3c^{n-1}$$

求める確率は

$$c(a^{n-1}-3b^{n-1}+3c^{n-1})=\boldsymbol{\dfrac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^n}}$$



♦別解♦ a, b, c, U は解答と同じ．U の中には不適な場合の確率が含まれている．

$n-1$ 回で取り出す玉の色が 2 色に集中する確率について．どの 2 色に集中するかで，その組合せが ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りある．たとえば白玉と青玉に集中する場合の確率は $b^{n-1}-2c^{n-1}$ である．b^{n-1} の中には白玉だけに集中する確率 c^{n-1} と青玉だけに集中する確率 c^{n-1} が含まれている．$n-1$ 回で取り出す玉の色が 2 色に集中する確率は $3(b^{n-1}-2c^{n-1})$ である．

$n-1$ 回で取り出す玉の色が 1 色に集中する確率について．その色が何かで 3 通りある，たとえば白玉に集中する場合の確率は c^{n-1} だから 1 色に集中する確率は $3c^{n-1}$ である．

求める確率は $c\{a^{n-1}-3(b^{n-1}-2c^{n-1})-3c^{n-1}\}$

$$=\boldsymbol{\dfrac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^n}}$$