**4** $a, b$ を実数とし，$a, b$，および $1-a-b$ はすべて正であるとする．サイコロが1個あり，1の目が出る確率は $a$ であり，2の目が出る確率は $b$ であり，3，4，5，6のいずれかの目が出る確率は $1-a-b$ であるとする．箱Aに球がいくつか入っており，それぞれの球は黄球，赤球，白球のいずれかであるとき，この箱Aに対する次の操作 $(*)$ を考える：

$(*)$ 空の袋を用意し，箱Aの中のすべての球をその袋に移してまず箱Aを空にし，次にその袋に入っているそれぞれの球について，次の(ｉ),(ii)を行う．
(ｉ) その球の色が黄ならサイコロを振り，1の目が出れば黄球2個を箱Aに入れ，2の目が出れば赤球1個を箱Aに入れ，それら以外の目が出れば黄球1個を箱Aに入れる．
(ii) その球の色が赤または白なら，白球1個を箱Aに入れる．

最初に黄球1個のみが入っている箱Aに対し操作 $(*)$ を3回行った直後に箱Aに入っている黄球，赤球，白球の個数を，それぞれ $Y, R, W$ と表す．ただし，2回目以降の操作 $(*)$ は，その直前に行った操作 $(*)$ により得られた箱Aに対し行うものとする．

（1） $W=2$ となる確率 $p_1$ を求めよ．

（2） $W \geqq 1$ となる確率 $p_2$ を求めよ．

（3） $R \geqq 3$ となる確率 $p_3$ を求めよ． （21 京都工繊大・後期）

**4** 数学A【独立試行・反復試行の確率】標準

**▶解答◀** （**1**） 黄球，赤球，白球をそれぞれ $y, r, w$ とする．$c=1-a-b$ とおく．

意味が分かりにくい．最初，Aには $y$ が1個ある．$y$ を空の袋に入れる．Aは空箱になる．袋には $y$ が1個ある．(ｉ)を適用し，サイコロを振り

(a) 1が出れば（確率 $a$）$y, y$（$y$ が2個のこと．他も同様に読め）をAに入れる．

(b) 2が出れば（確率 $b$）$r$ をAに入れる．

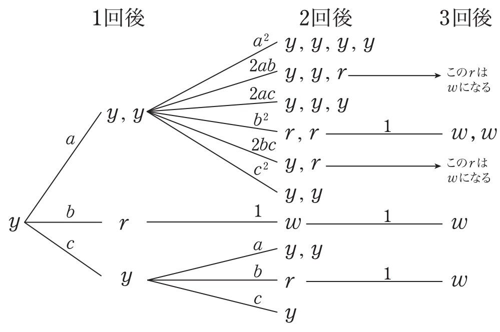
(c) 1，2以外が出れば（確率 $c$）$y$ をAに入れる．

(a)のとき．2回目には，$y, y$ を空の袋に入れる．Aは空箱になる．袋には $y, y$ が入る．それを $y_1, y_2$ とする．
$y_1$ について．(ｉ)を適用し，確率 $a$ で $y, y$，確率 $b$ で $r$，確率 $c$ で $y$ がAに入る．
$y_2$ について．(ｉ)を適用し，確率 $a$ で $y, y$，確率 $b$ で $r$，確率 $c$ で $y$ がAに入る．
この $y_1$，$y_2$ の作業の結果として2回後のAの中は
確率 $a^2$ で $y, y, y, y$
確率 $2ab$ で $y, y, r$（$y_1$ についての作業で $y, y$ が入り，$y_2$ についての作業で $r$ が入るか，この逆）
確率 $2ac$ で $y, y, y$（$y_1$ についての作業で $y, y$ が入り，$y_2$ についての作業で $y$ が入るか，この逆）
確率 $b^2$ で $r, r$
確率 $2bc$ で $y, r$（$y_1$ についての作業で $y$ が入り，$y_2$ についての作業で $r$ が入るか，この逆）
確率 $c^2$ で $y, y$
となる．

(b)のとき．2回目には，$r$ を空の袋に入れる．Aは空箱になる．次にAに $w$ が入る．

(c)のとき．2回目には，$y$ を空の袋に入れる．もう様子が分かっただろう．2回後には $y, y$ か，$r$ か，$y$ になる．

箱Aの中の変化の様子は図のようになる．分岐の線分の上の $a^2$ 等は確率を表す．また一旦袋に移す作業は樹形図には書いてない．3回後の状態は不完全に書いてある．書き切れないからである．




$W=2$ となるのは2回後にAの中が $r, r$ になるときである．3回後に $w, w$ になる．

$$\boldsymbol{p_1 = ab^2}$$

（**2**） たとえば（最初の $y$ の後に）1回後に $y, y$ になることを，便宜的に「$y$ が $y, y$ に変わる」「$y$ が $y, y$ になる」等と書くことにする．他も同様に読め．$y$ の1回後には $w$ が来ない．$r, w$ は次には $w$ になる．$W \geqq 1$ に

なるのは 2 回後に $r$ または $w$ がある場合である．

$$\boldsymbol{p_2} = a\cdot 2ab + a\cdot b^2 + a\cdot 2bc + b\cdot 1 + c\cdot b$$
$$= 2a^2b + ab^2 + 2ab(1-a-b) + b + b(1-a-b)$$
$$= \boldsymbol{-ab^2 - b^2 + ab + 2b}$$

（**3**） 1 個の $r$ は 1 個の $y$ が変わったものである．

$R \geqq 3$ となるのは，2 回後に $y, y, y, y$（確率 $a\cdot a^2$）で，4 つとも $r$ に変わる（確率 $b^4$）か，3 つが $r$ に変わり他の 1 つが $y$ か $y, y$ に変わる（確率 ${}_4\mathrm{C}_3 b^3(1-b)$）か，2 回後に $y, y, y$（確率 $a\cdot 2ac$）で，3 つとも $r$ に変わる（確率 $b^3$）ときで

$$\boldsymbol{p_3} = a^3\cdot b^4 + a^3\cdot 4b^3(1-b) + 2a^2(1-a-b)\cdot b^3$$
$$= \boldsymbol{2a^2b^3 + 2a^3b^3 - 2a^2b^4 - 3a^3b^4}$$