2 四面体OABCがある．辺OAを2：1に外分する点をDとし，辺OBを3：2に外分する点をEとし，辺OCを4：3に外分する点をFとする．点Pは辺ABの中点であり，点Qは線分EC上にあり，点Rは直線DF上にある．3点P，Q，Rが一直線上にあるとき，線分の長さの比EQ：QCおよびPQ：QRを求めよ．

（21　京都工繊大・前期）

2

数学B【ベクトルと図形（空間）】**標準**

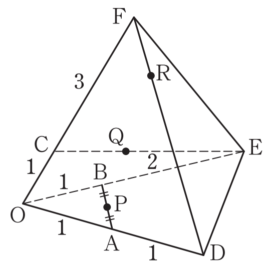
考え方　「日本ではベクトル教育は行われていない．問題文に『$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，EQ：QC $=(1-s):s$ とおけ』などと，すべてお膳立てがしてあり，後はこれで計算しなさいという，ベクトルに名を借りた計算問題が行われているだけである」というのが，私の主張である．本問は問題文に，ベクトルという言葉がない．方針が立たない生徒が多い．教育的な問題である．

図形問題は，解法の選択が問題である．図形的に解く．ベクトルで計算する．三角関数で計算する．困ったら座標計算する．今は比が多いからベクトルである．

式の立て方が問題である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を基底にして式を立てるのはよいだろう．EQ：QC を求めるから，これを設定してQを表示する．Qは線分EC上にあるから，内分比を設定する．PQ：QR を求めるから $\overrightarrow{\mathrm{QR}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と置くのもよいだろうか？ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ でも同じである．ただし，Rはとても遠くにある．

さらに，文字の消去の仕方も問題である．よく見て，1つずつ文字を消していこう．下手な消し方をすると分数式が出て来る．k には手を触れないで，s, t を消去していこう．k を無視して，「$2t, -3s, 3-4t+s$」「$-\frac{1}{2}, 3s-\frac{1}{2}, 1-s$」から s, t を消すのである．

▶解答◀　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．



$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=3\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=4\vec{c}$ であり $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ となる．また，QはEC上，RはDF上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3s\vec{b}+(1-s)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OF}}=2t\vec{a}+4(1-t)\vec{c}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\left(3s-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+(1-s)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$=2t\vec{a}-3s\vec{b}+(3-4t+s)\vec{c}$$

P，Q，Rは一直線上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とおけて

$$2t\vec{a}-3s\vec{b}+(3-4t+s)\vec{c}$$
$$=-\frac{k}{2}\vec{a}+k\left(3s-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+k(1-s)\vec{c}$$

係数を比べて

$$2t=-\frac{k}{2} \quad\cdots\cdots①$$
$$-3s=k\left(3s-\frac{1}{2}\right) \quad\cdots\cdots②$$
$$3-4t+s=k(1-s) \quad\cdots\cdots③$$

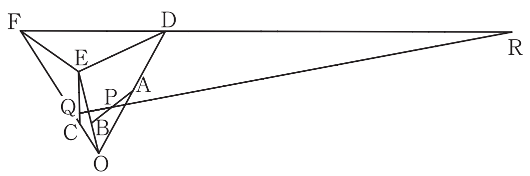
となる．②＋③×3で s を消去して

$$9-12t=\frac{5}{2}k \quad\cdots\cdots④$$

①×6＋④で t を消去して $9=-\frac{1}{2}k$ となる．$k=-18$ となり，①に代入し $t=\frac{9}{2}$ で，②に代入し -3 で割ると $s=6\left(3s-\frac{1}{2}\right)$ で，$s=\frac{3}{17}$ となる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{17}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{14}{17}\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{QR}}=-18\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

EQ : QC = **14 : 3**，PQ : QR = **1 : 18**



注意　最初の図は不自然で，とてもP，Q，Rが一直線上にあるとは思えないだろう．実際の位置関係は上のようになっている．