5 座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x, y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\ y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問に答えよ．

（1） 点Pと原点Oとの距離を求めよ．

（2） 点Pの時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ．

（3） 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ． （21 神戸大・前期）

5

数学Ⅲ【速度と道のり】標 準

▶解答◀ （**1**） $c=\cos t, s=\sin t$ とおく．

$$\mathrm{OP}^2=x^2+y^2=\frac{(4+5c)^2+(3s)^2}{(5+4c)^2}$$

$$=\frac{16+40c+25c^2+9s^2}{(5+4c)^2}$$

$$=\frac{25+40c+16c^2}{(5+4c)^2}=1$$

であるから，$\mathrm{OP}=\mathbf{1}$ である．

（**2**） $$\frac{dx}{dt}=\frac{-5s(5+4c)+4(4+5c)s}{(5+4c)^2}$$

$$=-\frac{9s}{(5+4c)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=3\cdot\frac{c(5+4c)-s\cdot4(-s)}{(5+4c)^2}$$

$$=\frac{3(4+5c)}{(5+4c)^2}$$

$$\vec{v}=\left(-\boldsymbol{\frac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2}},\ \boldsymbol{\frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}}\right)$$

$$=\frac{3}{5+4\cos t}\left(\frac{-3\sin t}{5+4\cos t}, \frac{4+5\cos t}{5+4\cos t}\right)$$

$$=\frac{3}{5+4\cos t}(-y, x)$$

$$|\vec{v}|=\frac{3}{5+4\cos t}\sqrt{(-y)^2+x^2}=\boldsymbol{\frac{3}{5+4\cos t}}$$

（**3**） t が 0 から π まで動くときのPの曲線の長さ L を考えると

$$L=\int_0^\pi |\vec{v}|\,dt=\int_0^\pi \frac{3}{5+4\cos t}\,dt \quad\cdots\cdots\cdots①$$

また，実際にPの動きを考える．$0 \leqq t \leqq \pi$ において

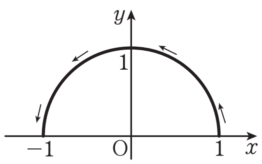
$$\frac{dx}{dt} \leqq 0,\ y \geqq 0$$

$t=0$ のとき $(x, y)=(1, 0)$，$t=\pi$ のとき $(x, y)=(-1, 0)$ である．さらに，（1）よりPは単位円上を動くから，これらをすべて合わせると，t が 0 から π まで動くと，Pは単位円上の上半分をくまなく動くことがわかる．

よって，$L=2\pi\cdot\dfrac{1}{2}=\pi$ である．①より

$$\int_0^\pi \frac{3}{5+4\cos t}\,dt=\pi$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{5+4\cos t}\,dt=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$



注意 大学に行って，複素積分を習うと，留数の定理という大変美しい定理によってもっと簡単に（3）の積分を求めることができるが，それはそのときまでのお楽しみである．