2 ある飲食店には横一列に並んだカウンター席が 10 席あるが，客は互いに 2 席以上空けて座らなければならない．

（１） 同時に座ることのできる最大の客数を求めなさい．

（２） 客が 2 名のとき，席の空き方は何通りあるか．

（３） 客が 1 名以上のとき，席の空き方は全部で何通りあるか．　　（21　龍谷大・推薦）

2 数学A【場合の数】標 準

考え方　いろいろな解法がある．「席の空き方」という言葉が，2021 年東大文科の場合の数の問題につながる．

▶解答◀　客の座席を○，空席を×と表す．

（１） 同時に座ることのできる客数が最大となるのは，

○××○××○××○

となる場合であるから，求める客数は **4** 人である．

（２） 10 個の席に左から 1, …, 10 と番号をつける．客が座る座席の番号を $x, y\ (1 \leqq x < y \leqq 10)$ とする．2 席以上空けるという条件は $y-x \geqq 3\ (y-x>2)$ ということであり，$1 \leqq x < y-2 \leqq 8$ となる．

1, …, 8 から異なる 2 数を選ぶ組合せを考え，(x, y) は ${}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=\mathbf{28}$ 通りある．

$$1 \quad \overbrace{x \qquad\qquad y}^{3以上離れている} \quad 10$$

$$1 \quad \underbrace{x \qquad y-2}_{} \quad 8$$

1以上　2ずらす

（**3**）（ア） 客が 1 名のとき，10 通り．

（イ） 客が 2 名のとき，（２）より 28 通り．

（ウ） 客が 3 名のとき，客が座る席の番号を x, y, z $(1 \leqq x < y < z \leqq 10,\ y-x>2,\ z-y>2)$ とする．$1 \leqq x < y-2 < z-4 \leqq 6$ だから (x, y, z) の個数は

$${}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$$

（エ） 客が 4 名のとき，（１）より 1 通り．

以上より求める総数は $10+28+20+1=\mathbf{59}$ 通り．

♦別解♦　（２） もっと地道に調べる方法もある．

$x=1$ のとき，$y=4, \cdots, 10$ の 7 通り．

$x=2$ のとき，$y=5, \cdots, 10$ の 6 通り．

これを続け，(x, y) の個数は

$$7+6+\cdots+1=\frac{1}{2}7\cdot 8=28$$

（**3**）（ウ） $x=1, y=4$ のとき，$z=7, \cdots, 10$ の 4 通り．$x=1, y=5$ のとき，$z=8, 9, 10$ の 3 通り．

これを続け，$x=1$ のとき (y, z) の個数は $4+3+2+1$

$x=2$ のとき (y, z) の個数は $3+2+1$

これを続け，(x, y, z) の個数は

$$(4+3+2+1)+(3+2+1)+(2+1)+1=20$$

♦別解♦　（２） 2 つの着席と空席を，

空席 x 個，着席，空席 y 個，着席，空席 z 個

と考える．

$$x+y+z=8,\ x \geqq 0,\ y \geqq 2,\ z \geqq 0$$

となるから

$$(x+1)+(y-1)+(z+1)=9,$$

$$x+1 \geqq 1,\ y-1 \geqq 1,\ z+1 \geqq 1$$

となる．ボールを 9 個並べ，その間から 2 カ所を選び，1 本目から左のボールの個数を $x+1$，2 本の仕切りの間のボールの個数を $y-1$，残りの個数を $z+1$ とする．たとえば

○○｜○○○｜○○○○

の場合は $x+1=2, y-1=3, z+1=4$ となる．自然数解 $(x+1, y-1, z+1)$ の個数は，ボールの間（8 カ所ある）から 2 カ所を選んで仕切りを突っ込むと考え，${}_8\mathrm{C}_2=\mathbf{28}$ 通りある．

注意 1°【一般解】

カウンターが n 席あって，k 人座る場合を考える．ただし，ここでは $k \geqq 0$ とする．

$k \geqq 2$ のとき，着席を左から $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \cdots, \mathrm{C}_k$ とし，この両端と着席の間に空席を突っ込む．C_1 の左に突っ込む空席の数を x_0，C_1 と C_2 の間に突っ込む空席の数を x_1，C_2 と C_3 の間に突っ込む空席の数を x_2，C_{k-1} と C_k の間に突っ込む空席の数を x_{k-1}，C_k の右に突っ込む空席の数を x_k とする．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_{k-1} & & x_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \mathrm{C}_1 & & \mathrm{C}_2 & & \mathrm{C}_3 & & \mathrm{C}_4 & & \mathrm{C}_{k-1} & & \mathrm{C}_k & \end{array}$$

$$x_0 \geqq 0,\ x_1 \geqq 2,\ x_2 \geqq 2,\ \cdots,\ x_{k-1} \geqq 2,\ x_k \geqq 0$$

$$x_0+\cdots+x_k=n-k$$

である．x_0, x_k には 1 を加え，他は 1 を引いて

$$x_0+1 \geqq 1,\ x_1-1 \geqq 1,\ \cdots,\ x_{k-1}-1 \geqq 1,\ x_k+1 \geqq 1$$

$$(x_0+1)+(x_1-1)+\cdots+(x_{k-1}-1)+(x_k+1)$$

$$=n-k+2-(k-1)$$

となる．この自然数解

$(x_0+1,\ x_1-1,\ \cdots,\ x_{k-1}-1,\ x_k+1)$ の個数を求める．これは○を $n-2k+3$ 個並べ，その間（$n-2k+2$ カ所ある）から k カ所を選んで仕切りを入れ，1 本目から左の○の個数を x_0+1，1 本目と 2 本目の仕切りの間の○の個数を x_1-1，…，$k-1$ 本目と k 本目の仕切りの間の○の個数を $x_{k-1}-1$，k 本目の仕切りの右の○の個数を x_k+1 とすると考え，${}_{n+2-2k}\mathrm{C}_k$ 通りある．結果は $k=0$（1 通り），$k=1$ のとき（n 通り）の場合にも成り立つ．

$n+2-2k \geqq k$ より $k \leqq \dfrac{n+2}{3}$ となる．k は整数であるから $0 \leqq k \leqq \left[\dfrac{n+2}{3}\right]$ となる．

$$f(n)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+2}{3}\right]} {}_{n+2-2k}\mathrm{C}_k$$

である．$[x]$ は x の整数部分を表す．

2°【漸化式】着席を C，空席を K で表す．n 席の場合の C，K の列（総数は $f(n)$ 通り）は，左端が K の場合は $f(n-1)$ 通りあり，左端が C の場合は，左から 3 つが CKK で，後 $n-3$ 個の列が $f(n-3)$ 通りある．

$$f(n)=f(n-1)+f(n-3)$$

となる．これは 3 次方程式 $x^3=x^2+1$ の解が綺麗に求められないから，普通の形で，一般項を表示することはできない．「2 席以上空ける」でなく「1 席以上空ける」ならフィボナッチ数列になり，簡単な練習問題になる．