2. 媒介変数 $t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ を用いて

$$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$$

と表される曲線を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

（１） $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ．

（２） 曲線 C の長さ l を求めよ．

（３） 曲線 C と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積 V を求めよ．

（22　静岡大・後期）

▶解答◀ （１） $c = \cos t,\ s = \sin t$ と略記する．$x = c^3$，$y = s^3$ で

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (-3c^2 s)^2 + (3s^2 c)^2$$

$$= 9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = \boldsymbol{9\sin^2 t\cos^2 t}$$

（２） 図１を参照せよ．$(\cos t, \sin t)\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ は半円 $x^2 + y^2 = 1,\ y \geqq 0$ 上の点のパラメータ表示である．その各座標を３乗した点の描く曲線についても，対称性などは半円と同じである．C（図２）は y 軸に関して対称である．$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9s^2c^2$$

$$l = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3sc\,dt = \Big[\,3\sin^2 t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{3}$$

図１

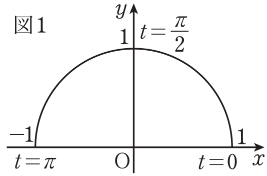
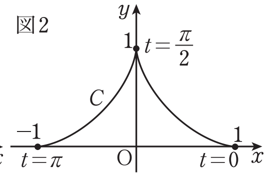


図２



（３） $V = 2\displaystyle\int_0^1 \pi y^2\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi y^2 \frac{dx}{dt}\,dt$

$$y^2\frac{dx}{dt} = s^6(-3c^2 s) = 3(1-c^2)^3(-c^2 s)$$

$$= 3(1 - 3c^2 + 3c^4 - c^6)(-c^2 s)$$

$$= 3(c^2 - 3c^4 + 3c^6 - c^8)(c)'$$

$$V = 6\pi\left[\,\frac{1}{3}c^3 - \frac{3}{5}c^5 + \frac{3}{7}c^7 - \frac{1}{9}c^9\,\right]_{\frac{\pi}{2}}^0$$

$$= 6\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) = 6\pi\left(\frac{2}{9} - \frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}\right)$$

$$= 2\pi\cdot 2\cdot\frac{35-27}{3\cdot 5\cdot 7} = \boldsymbol{\frac{32}{105}\pi}$$