2 p, q を相異なる素数とする．次の3条件をみたす x の2次式 $f(x)$ を考える．

- 係数はすべて整数で x^2 の係数は1である．
- $f(1) = pq$ である．
- 方程式 $f(x) = 0$ は整数解をもつ．

以下の問に答えよ．

（1） $f(x)$ をすべて求めよ．

（2）（1）で求めたものを $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ とする．$2m$ 次方程式 $f_1(x) \times f_2(x) \times \cdots \times f_m(x) = 0$ の相異なる解の総和は p, q によらないことを示せ．（22 早稲田大・理工）

2 数学A【整数問題の雑題】標準

▶解答◀ （1） p, q は相異なる素数だから $p < q$ としてよい．$f(x)$ の2次の係数は1，x の係数は整数だから，2解の和は整数であり，解の一方が整数なら他方も整数である．$f(x) = 0$ は整数解をもつから2解とも整数である．それらを $\alpha, \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ とする．

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$$

と書ける．このとき，

$$f(1) = (1 - \alpha)(1 - \beta) = pq$$

p, q は素数，かつ，$1 - \alpha \geqq 1 - \beta$ より

$1-\alpha$	pq	q	-1	$-p$
$1-\beta$	1	p	$-pq$	$-q$

これらを α, β について解くと次の表のようになる．

α	$1-pq$	$1-q$	2	$1+p$
β	0	$1-p$	$1+pq$	$1+q$

これより，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{\{x-(1-pq)\}x,}$$

$$\boldsymbol{\{x-(1-q)\}\{x-(1-p)\},}$$

$$\boldsymbol{(x-2)\{x-(1+pq)\},}$$

$$\boldsymbol{\{x-(1+p)\}\{x-(1+q)\}}$$

の4つである．

（2）（1）の $f(x)$ を上から順に $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ とおくと，8次方程式

$$f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x) = 0$$

の解は（1）の表よりすべて異なり，その和は

$$\{(1-pq)+0\} + \{(1-q)+(1-p)\}$$
$$+\{2+(1+pq)\} + \{(1+p)+(1+q)\} = 8$$

となるから，確かに p, q によらない．