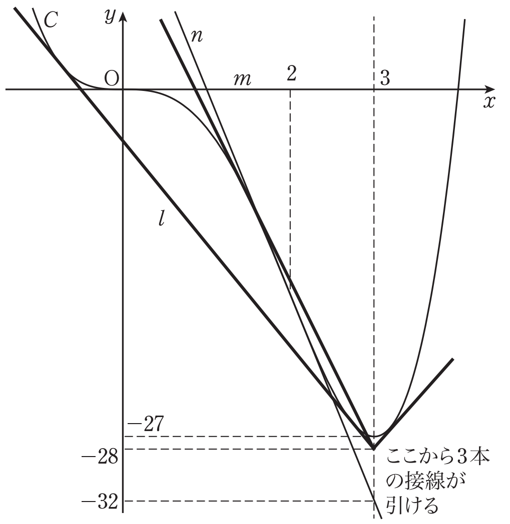
《複接線にご用心》

1．関数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ は，$f(4)=0$ を満たし，$x=3$ で極小値 -27 をとる．このとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ である．p を実数とするとき，点 $(3,\ p)$ を通り，曲線 $y=f(x)$ に接する接線の本数 n について考える．$n=1$ であるような p の値は $\boxed{}$ であり，$n=3$ であるような p の値は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ と $\boxed{}$ である．

（18　同志社大・経済）

考え方　本問は，出題者の与えた最後の空欄が 2 つだったために，出題ミスになった．本書に採用するに当たって，空欄の数を増やしておいた．

曲線そのもの，変曲点における接線，複接線，漸近線がポイントになる．数学 II の場合は「漸近線」は関係ない．直線 $x=3$ 上の点で，C に 1 本の接線が引けるのは $(3,\ 0)$ である．図では点 $(3,\ -28)$ から 3 本の接線が引けることを示している．



本問の場合，複接線（解答で求める）は

$l: y=-8x-4$，変曲点 $(0,\ 0)$ における接線は

$m: y=0$，$(2,\ -16)$ における接線は $n: y=-16x+16$ である．これらと曲線で，平面全体を区切る．その各領域の中の点から，実際に，接線を引いて，図形的に見るのが，早くて安全である．出題者も，それをやれば，出題ミスをすることはなかっただろう．

▶解答◀　$f(4)=0$ より

$$64+16a+4b+c=0 \quad\cdots\cdots①$$

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ であり，$f'(3)=0$ より

$$108+27a+6b+c=0 \quad\cdots\cdots②$$

$f(3)=-27$ より

$$81+27a+9b+3c=-27$$

$$36+9a+3b+c=0 \quad\cdots\cdots③$$

② − ① より

$$44+11a+2b=0 \quad\cdots\cdots④$$

① − ③ より

$$28+7a+b=0 \quad\cdots\cdots⑤$$

⑤ × 2 − ④ より $12+3a=0$

よって $a=\mathbf{-4}$ であり，⑤ に代入すると $b=\mathbf{0}$

これを ① に代入し，$c=\mathbf{0}$ を得る．

$f(x)=x^4-4x^3$ である．

次に複接線 $y=mx+n$ を求める．

$$x^4-4x^3-(mx+n)=(x^2+qx+r)^2$$

とおく．ただし，$x^2+qx+r=0$ の解は複接線と曲線の接点の x 座標であり，判別式について，$q^2-4r>0$ である．

$$x^4-4x^3-(mx+n)$$
$$=x^4+2qx^3+(q^2+2r)x^2+2qrx+r^2$$

係数を比べ

$$2q=-4,\ q^2+2r=0,\ 2qr=-m,\ r^2=-n$$

$$q=-2,\ r=-2,\ m=-8,\ n=-4$$

複接線 l は $l: y=-8x-4$ であり，このとき $q^2-4r>0$ を満たす．$f'(x)=4x^3-12x^2$ である．曲線の $x=t$ における接線は

$$y=(4t^3-12t^2)(x-t)+t^4-4t^3$$

$$y=(4t^3-12t^2)x-3t^4+8t^3$$

であり，これが点 $(3,\ p)$ を通るとき

$$p=-3t^4+20t^3-36t^2$$

となる．$g(t)=-3t^4+20t^3-36t^2$ とおく．

$$g'(t)=-12t^3+60t^2-72t$$
$$=-12t(t-2)(t-3)$$

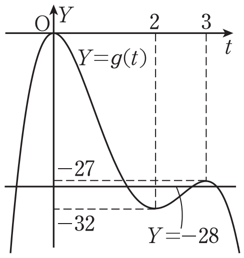
$$g(0)=0,\ g(2)=-32,\ g(3)=-27$$

$(3,\ p)$ を通る曲線 $y=f(x)$ の接線が 1 本存在する条件は $Y=g(t)$ と $Y=p$ がただ 1 つの共有点をもつことで，$p=\mathbf{0}$ である．

l で $x=3$ とおくと $y=-28$ になる．$(3,\ p)$ を通る曲線 $y=f(x)$ の接線が 3 本存在する条件は

$$p=\mathbf{-32,\ -28,\ -27}$$

である．



注 意 $p=-28$ のときは，解 t は 4 つあるが，$(3,\ p)$ を通る接線は 4 本あるわけではない．$t^2+qt+r=0$ の解，すなわち $t=1\pm\sqrt{3}$ からは，1 本の接線しか得られない．

1．関数

$$f(x)=\int_1^x \frac{x+4t}{\sqrt{3x^4+t^4}}\,dt\ (x>0)$$

の $x=2$ における微分係数は $f'(2)=\boxed{}$ である．（17　東京医大）

考え方　難問であるから，無視してよい．力試しをしたい人のために入れておいた．

積分を実行できそうには思えない．分母の，ルートの中の文字の次数が高いからだ．それなら，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt=g(x)$$

を使って，いきなり微分するしかないが，今度は，積分記号の中に x があるため，このままでは，微分は実行できない．そこで形を見る．$\dfrac{x+4t}{\sqrt{3x^4+t^4}}$ の分子で，x,t を不定元（変数）と考えたとき，$x+4t$ は1次の項からできており，分母の $3x^4+t^4$ も x,t の4次の項からできている．もし $\dfrac{(x+4t)^2}{3x^2+t^2}$ のような式なら，2次の同次形といい，比を考え，$\dfrac{t}{x}=u$（または $\dfrac{x}{t}=u$）と変数をとりなおすと，上手くいくことがある．ただし今はルートがあるし，置換積分のズレがあるから，4次式のルートを2次と考えても，完全な同次形とは言いがたいが，「比を変数にとる」という発想は試す価値はある．

▶解答◀　$\dfrac{t}{x}=u$ とおく．$t=xu$ である．$\dfrac{dt}{du}=x$ だから $dt=x\,du$

t	$1\to x$
u	$\dfrac{1}{x}\to 1$

$$f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{x+4xu}{\sqrt{3x^4+x^4u^4}}x\,du$$

$$=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1+4u}{\sqrt{3+u^4}}\,du=-\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1+4u}{\sqrt{3+u^4}}\,du$$

x は上端にだけ残って，後は消えた．

u,v が x の微分可能な関数のとき

$$\frac{d}{dx}\int_u^v g(t)\,dt=v'g(v)-u'g(u)$$

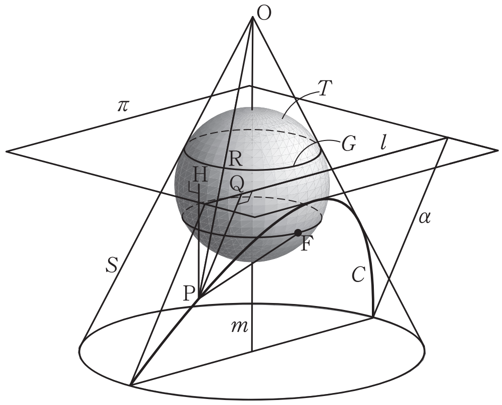
であることを用いて

$$f'(x)=-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1+4\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\left(\frac{1}{x}\right)^4}}$$

$$=\frac{1+\frac{4}{x}}{\sqrt{3x^4+1}}$$

$$f'(2)=\frac{1+2}{\sqrt{3\cdot16+1}}=\mathbf{\frac{3}{7}}$$

1．空間において，点 O を頂点とする直円錐 S がある．S の母線の 1 本に平行な O を通らない平面 α で S を切る．S に内接する球面で，球の半径が 0 に近い状態から半径を大きくしていくと，α に接するところがある．そのときの球を T とする．T と S の接点全体は円をなす．その円を G とし，G を含む平面を π とする．α と T の接点を F，α と π の交線を l とする．S と α の交線を C，C 上の任意の 1 点を P，P から π, l に下ろした垂線の足を H，Q，線分 OP と G の交点を R とする．

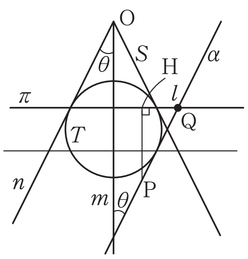


C は F を焦点，l を準線とする放物線であることを証明せよ．すなわち，PQ = PF であることを証明せよ．

▶解答◀ 円錐の中心軸（問題文の図の m）と母線のなす角を θ とする．

問題文の図を見よ．PH は π と垂直だから母線 OP と PH のなす角は OP と m のなす角に等しく，$\angle\mathrm{RPH} = \theta$ である．

次の図を見よ．l は紙面に垂直になっていると想像せよ．n は α と平行な母線である．



PQ は l と垂直だから，三角形 QPH を真横から見た形になっていて，$\angle\mathrm{QPH} = \theta$ である．ゆえに 2 つの直角三角形 QPH，三角形 RPH は合同であるから PQ = PR である．さらに，F は球 T と α の接点であるから，直線 PF は T の接線であり，直線 PR も T の接線である．P から球 T に引いた接線の長さは一定であるから PR = PF である．ゆえに PQ = PR = PF である．よって証明された．

注意 アポロニウスの円錐曲線論（2000 年以上昔）は，このように円錐を平面で切ってできる曲線を論じている．その当時は現代のような座標はなく，まして，空間座標はないから幾何的にアプローチするしかなかった．だから，放物線の定義の始まりはこのような図形的な定義である．

2．座標空間において，原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円が xy 平面上にある．この円を底面とし，A$(0, 0, \sqrt{2})$ を頂点とする円錐（すい）を考える．A と底面の円周上の点 B$(-\sqrt{2}, 0, 0)$ を結ぶ線分 AB の中点を C とする．点 P は線分 CA 上を動き，CP $= a$ とする．P を通り線分 AB と垂直に交わる平面でこの円錐を切ったときの断面積を $S(a)$ とする．

（1） $S(0) = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\boxed{}$ である．

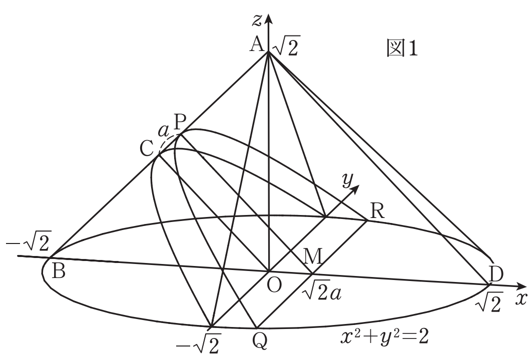
（2） $S(a)$ は $a = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ のとき最大値 $\boxed{}$ をとる．

（3） C を通り線分 AB と垂直に交わる平面で円錐を 2 つの立体に分けるとき，頂点 A を含む方の立体の体積は

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} + \frac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}\pi$$

である．（18 上智大・理工）

▶解答◀ できる限り座標を援用する．図 1 を見よ．断面の曲線は放物線になる．



D$(\sqrt{2}, 0, 0)$ とする．断面と底面の円板の交線の両端

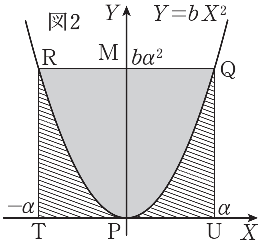
を Q，R，その中点を M とする．放物線が QR と囲む図形の面積 $S(a)$ は，それが収まる長方形の面積の 3 分の 2 である．これを図 2 を使って説明する．

断面を切り出して図 2 のような XY 平面に置く．そのとき Q の X 座標を $\alpha\ (>0)$，放物線を $Y=bX^2\ (b>0)$ とする．長方形 TUQR の面積を［TUQR］で表す．放物線と X 軸の間にある部分の面積は

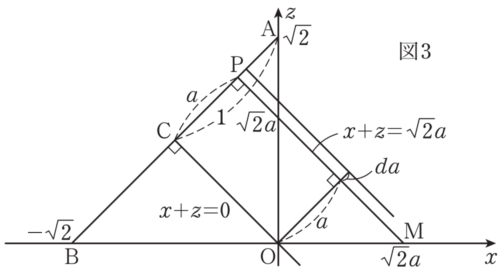
$$2\int_0^{\alpha} bX^2\,dX = 2b\left[\ \frac{X^3}{3}\ \right]_0^{\alpha} = \frac{2b}{3}\alpha^3 = \frac{1}{3}[\mathrm{TUQR}]$$

である．よって $S(a)=\dfrac{2}{3}[\mathrm{TUQR}]$ である．

ゆえに，$S(a)$ が求めたければ，断面の間口の広さ（QR の長さ）と深さ（PM の長さ）が分かればよい．



y 軸の負方向から見た図 3 を見よ．図 1 よりも C と P の間を広く空けて描いた．



断面は $x+z=\sqrt{2}a$ である．円 $x^2+y^2=2$ で $x=\sqrt{2}a$ とおくと，$y=\pm\sqrt{2-2a^2}$ となるから

$$\mathrm{QR} = 2\sqrt{2-2a^2}$$

となる．次に $\mathrm{BM}=\sqrt{2}a+\sqrt{2}$ だから

$$\mathrm{PM} = \frac{\mathrm{BM}}{\sqrt{2}} = a+1$$

$$S(a) = \frac{2}{3}\cdot(a+1)\cdot 2\sqrt{2-2a^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}(1+a)\sqrt{1-a^2}$$

（1） $S(0) = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{2}}{3}}$

（2） a の範囲は $0 \leqq a \leqq 1$ である．

$$S(a) = \frac{4\sqrt{2}}{3}(1+a)\sqrt{(1-a)(1+a)}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{(1+a)^3(1-a)}$$

$f(a)=(1+a)^3(1-a)$ とおく．

$$f'(a) = 3(1+a)^2(1-a)-(1+a)^3$$

$$= (1+a)^2\{3(1-a)-(1+a)\}$$

$$= 2(1+a)^2(1-2a)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗		↘	

$S(a)$ は $a=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ のとき最大値

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \boldsymbol{\sqrt{6}}$$

をとる．

（3） $S(a) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-a^2}\right)$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left\{\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}(1-a^2)'(1-a^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

求める体積を V とする．断面 $x+z=\sqrt{2}a$ と断面 $x+z=\sqrt{2}(a+da)$ の間の厚みは da であるから，$dV=S(a)\,da$ である．

$$V = \int_0^1 S(a)\,da$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\ \frac{2}{3}(1-a^2)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1\right\}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{9}+\frac{\sqrt{2}}{3}}\pi$$

なお，積分の第一項は四分円の面積を利用した．