《十分性の証明》

（1） 平行四辺形 ABCD において，

$$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=a,\ \mathrm{BC}=\mathrm{AD}=b,\ \mathrm{BD}=c,\ \mathrm{AC}=d$$

とする．このとき，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$ が成り立つことを証明せよ．

（2） 3 つの正数 $a,\ b,\ c\ (0<a\leqq b\leqq c)$ が $a^2+b^2>c^2$ を満たすとき，各面の三角形の辺の長さを $a,\ b,\ c$ とする四面体が作れることを証明せよ．

（03　名大・理系）

▶解答◀ （**1**） $\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とおく．

$\angle\mathrm{ABC}=180^\circ-\theta$ である．$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を用いて

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \quad \cdots\cdots①$$

$$d^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\theta)$$

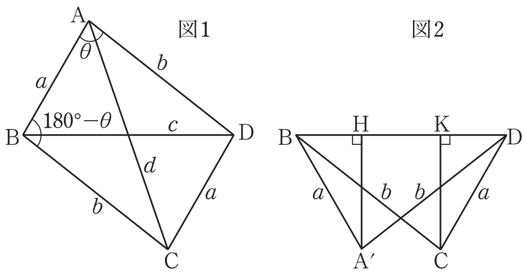
よって

$$d^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta \quad \cdots\cdots②$$

(①＋②)÷2 より

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}(c^2+d^2) \quad \cdots\cdots③$$

よって証明された．



（**2**） $a^2+b^2>c^2$ より

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$$

よって θ は鋭角である．$\triangle\mathrm{ABD}$ で BD が最大辺だから $\angle\mathrm{BAD}$ が最大角である．これが鋭角だから他の内角も鋭角で $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{CDB}$ は鋭角である．A の直線 BD に関する対称点を A′ とし，A′ と C から BD に下ろした垂線の足を H，K とすると，$a\leqq b$ より B，H，K，D の順にある（$a=b$ のときは H，K は一致

する).

$$\mathrm{CA}' = \mathrm{HK} < \mathrm{BD} = c$$

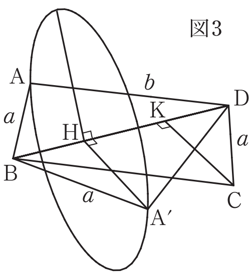
である.また ③ より

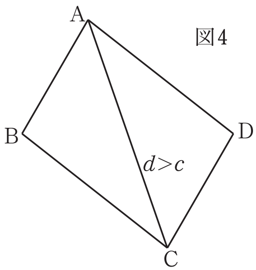
$$\frac{1}{2}(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 > c^2$$

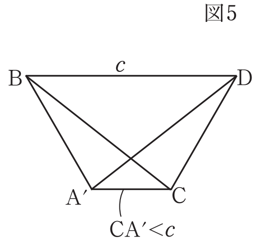
つまり $d > c$ ある.

以上は平面上での話であったが,これから空間図形として考える.(1)の平行四辺形の紙を BD を折り目として折り △ABD を回転させる(図 1 の △ABD を折って手前に起こしてくる).このとき CA 間の距離が最初は CA $> c$ であったが,A が平面 BCD 上にのると CA $< c$ になる.この途中のどこかで CA $= c$ となる点があり,このときの四面体 ABCD について,各面の 3 辺の長さは a, b, c である.

図 3 は A が回転している様子を表す.







注意 図 4,5 は不要な線を消してある.図 4 は A の回転前で,図 5 は,回転終了である.この途中で,CA $= c$ となる空中の A がある.

なお,最初の「紙を折る」という設定で,LMN を固定して,実際に折ってみると,A,B,C は三角形 ABC の垂心の真上で出会うことがわかる.このことに着目する解法もある.また,いきなり座標計算する方法もある.しかし,万人向けとも思えないから,割愛する.