《》

1. 点Oを原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない2つのベクトル

$$\vec{m}=(a,\, c),\ \vec{n}=(b,\, d)$$

に対して，$D=ad-bc$ とおく．以下の問いに答えよ．

（1） $\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D=0$ であることを示せ．

以下，$D\neq 0$ であるとする．

（2） 座標平面上のベクトル $\vec{v},\, \vec{w}$ で

$$\vec{m}\cdot\vec{v}=\vec{n}\cdot\vec{w}=1,\ \ \vec{m}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$$

を満たすものを求めよ．

（3） 座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して

$$r\vec{m}+s\vec{n}=\vec{q}$$

を満たす実数 r と s を $\vec{q},\, \vec{v},\, \vec{w}$ を用いて表せ．

（23 九大・文系）

▶解答◀ （**1**）（必要性） $\vec{m}\,/\!/\,\vec{n}$ のとき，$\vec{m}=k\vec{n}$ とかける．これより

$$a=kb \text{ かつ } c=kd$$

であり，このとき，

$$D=(kb)d-b(kd)=0$$

となる．

（十分性） $D=0$ のとき，$(b,\, d)\neq\vec{0}$ より，$b,\, d$ のいずれかは0でない．

$b\neq 0$ のとき，$c=\dfrac{ad}{b}$ であるから

$$\vec{m}=\left(a,\ \frac{ad}{b}\right)=\frac{a}{b}(b,\, d)=\frac{a}{b}\vec{n}$$

$d\neq 0$ のとき，$a=\dfrac{bc}{d}$ であるから

$$\vec{m}=\left(\frac{bc}{d},\ c\right)=\frac{c}{d}(b,\, d)=\frac{c}{d}\vec{n}$$

となるから，いずれの場合においても $\vec{m}\,/\!/\,\vec{n}$ である．

（**2**） $\vec{v}=(P,\, R),\ \vec{w}=(Q,\, S)$ とする．

$$\vec{m}\cdot\vec{v}=aP+cR=1$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=bP+dR=0$$

$D=ad-bc\neq 0$ より

$$P=\frac{d}{ad-bc},\ R=\frac{-b}{ad-bc}$$

よって，$\vec{v}=\boldsymbol{\dfrac{1}{ad-bc}(d,\, -b)}$ である．また，

$$\vec{n}\cdot\vec{w}=bQ+dS=1$$

$$\vec{m}\cdot\vec{w}=aQ+cS=0$$

$D=ad-bc\neq 0$ より

$$Q=\frac{-c}{ad-bc},\ S=\frac{a}{ad-bc}$$

よって，$\vec{w}=\boldsymbol{\dfrac{1}{ad-bc}(-c,\, a)}$ である．

（**3**） $r\vec{m}+s\vec{n}=\vec{q}$ の両辺について，$\vec{v}$ との内積をとると，

$$r\vec{m}\cdot\vec{v}+s\vec{n}\cdot\vec{v}=\vec{q}\cdot\vec{v}$$

よって，$r=\boldsymbol{\vec{q}\cdot\vec{v}}$ となる．また，$\vec{w}$ との内積をとると

$$r\vec{m}\cdot\vec{w}+s\vec{n}\cdot\vec{w}=\vec{q}\cdot\vec{w}$$

であるから，$s=\boldsymbol{\vec{q}\cdot\vec{w}}$ となる．

◆別解◆ （**1**） $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\, c),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b,\, d)$ とする．$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする．O，A，Bで作る図形（一般的には三角形であり，O，A，Bが一直線上にあるときには線分）の面積の2倍を S とすると $S=|ad-bc|$ であり，

$\vec{m}\,/\!/\,\vec{n}\iff S=0\iff ad-bc=0\iff D=0$