1. a, b, c, d は実数とし，$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ を $f(x)$ とおく．4 次方程式 $f(x)=0$ が 2 つの実数解 $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$ および 2 つの虚数解 α, β を持つとする．次の問に答えよ．

（1） 整式 $f(x)$ は x^2-6 で割り切れることを示せ．

（2） $\alpha+\beta, \alpha\beta, c, d$ を a, b を用いて表せ．

（3） 複素数平面上において点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{C}(-\sqrt{6})$ が同一直線上にあるとき，a の値を求めよ．

（4）（3）において，さらに点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{D}(\sqrt{6})$ が正三角形の 3 つの頂点となるとき，b の値を求めよ． （23 佐賀大・理工）

《》

2. a, b, c, d は実数とし，$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ を $f(x)$ とおく．4 次方程式 $f(x)=0$ が 2 つの実数解 $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$ および 2 つの虚数解 α, β を持つとする．次の問に答えよ．

（1） 整式 $f(x)$ は x^2-6 で割り切れることを示せ．

（2） $\alpha+\beta, \alpha\beta, c, d$ を a, b を用いて表せ．

（3） 複素数平面上において点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{C}(-\sqrt{6})$ が同一直線上にあるとき，a の値を求めよ．

（4）（3）において，さらに点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{D}(\sqrt{6})$ が正三角形の 3 つの頂点となるとき，b の値を求めよ． （23 佐賀大・理工）

▶解答◀ （**1**） $f(x)=0$ は $x=\pm\sqrt{6}$ を解にもつから，$(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=x^2-6$ で割り切れる．

（**2**） $f(x)=0$ は $x=\pm\sqrt{6}$ を解にもつから，$f(\pm\sqrt{6})=0$ である．

$$f(\sqrt{6})=6\sqrt{6}a+6b+\sqrt{6}c+d+36=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$f(-\sqrt{6})=-6\sqrt{6}a+6b-\sqrt{6}c+d+36=0 \quad \cdots②$$

①＋② より $12b+2d+72=0$

$$\boldsymbol{d=-6b-36}$$

①－② より $12\sqrt{6}a+2\sqrt{6}c=0$

$$\boldsymbol{c=-6a}$$

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2-6ax-(6b+36)$$

で，x^2-6 を因子にもつから

$$f(x)=(x^2-6)(x^2+ax+b+6)$$

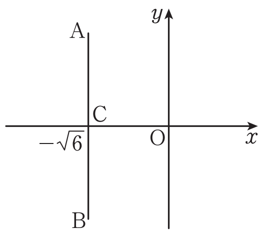
$x^2+ax+b+6=0$ の解が $x=\alpha, \beta$ であるから解と係数の関係を用いて

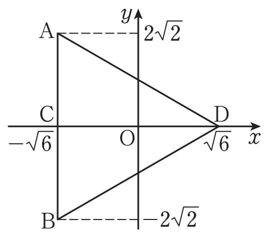
$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

$$\boldsymbol{\alpha\beta=b+6} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

（**3**） $f(x)=0$ は実数係数の方程式であるから，$\beta=\overline{\alpha}$ である．A, B, C が同一直線上のとき，α の実部は $-\sqrt{6}$ であるから，③ より

$$-a=-2\sqrt{6} \qquad \therefore \quad a=\boldsymbol{2\sqrt{6}}$$





（**4**） $\mathrm{CD}=2\sqrt{6}$ で，$\triangle\mathrm{ACD}$ は 30 度定規であるから $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$ となり

$$\alpha=-\sqrt{6}+2\sqrt{2}i, \beta=-\sqrt{6}-2\sqrt{2}i$$

とおける．④ より

$$b=\alpha\beta-6=6+8-6=\boldsymbol{8}$$