1　a を正の実数とする．座標平面において，放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とおく．l と C の交点のうち，P と異なる点を Q とおく．

（1） Q の x 座標を求めよ．

Q における C の接線と直交し，Q を通る直線を m とおく．m と C の交点のうち，Q と異なる点を R とおく．

（2） a がすべての正の実数を動くとき，R の x 座標の最小値を求めよ．　　（25　東大・文科）

1

数学II【接線または法線】**標 準**

《文系ゆえに難しい (B15) ☆》

▶解答◀ （1） $y' = 2x$ であるから，P における法線 l の方程式は，$a > 0$ に注意して

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2$$

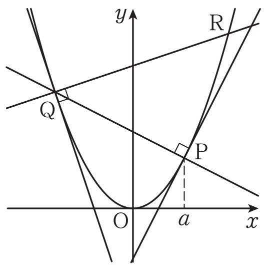
これと C を連立して

$$x^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2$$

$$(x - a)\left(x + a + \frac{1}{2a}\right) = 0$$

$$x = a,\ -a - \frac{1}{2a}$$

よって，Q の x 座標は $\boldsymbol{-a - \frac{1}{2a}}$ である．



（2） （1）の a を $-a - \frac{1}{2a}$ に置き換えると，R の x 座標は

$$-\left(-a - \frac{1}{2a}\right) - \frac{1}{2\left(-a - \frac{1}{2a}\right)}$$

$$= a + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a + \frac{1}{a}}$$

となる．$t = a + \frac{1}{2a}$ とおくと，相加・相乗平均の不等式より $t \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{2a}} = \sqrt{2}$ であり等号は $a = \frac{1}{2a}$ すなわち $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で成立する．また，a を大きくすると t はいくらでも大きくなる．これより t の値域は $t \geqq \sqrt{2}$ であり，R の x 座標は $t + \frac{1}{2t}$ となる．$k = t + \frac{1}{2t}$ とおくと，

$$2kt = 2t^2 + 1 \qquad \therefore \quad 2t^2 - 2kt + 1 = 0$$

この左辺を $f(t)$ とおいて，$f(t) = 0$ が $t \geqq \sqrt{2}$ の範囲に (少なくとも 1 つの) 実数解をもつ条件を考える．$f(0) = 1$ に注意し，$f(t)$ の判別式を D とすると，まず $D \geqq 0$ であり，

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad k \leqq -\sqrt{2},\ \sqrt{2} \leqq k \quad ①$$

$t \geqq \sqrt{2}$ に実数解をもつ条件は ① のもとで

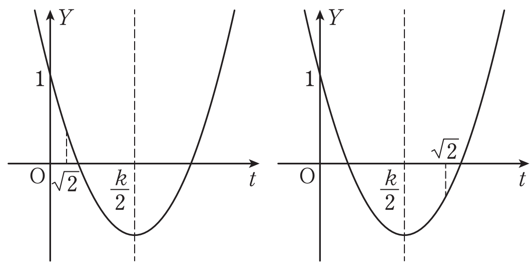
「$\frac{k}{2} \geqq \sqrt{2}$ かつ $f(\sqrt{2}) \geqq 0$」

または「$f(\sqrt{2}) \leqq 0$」

である．$f(\sqrt{2}) = 5 - 2\sqrt{2}k$ も合わせるとこれは

「$k \geqq 2\sqrt{2}$ かつ $k \leqq \frac{5}{2\sqrt{2}}$」または「$k \geqq \frac{5}{2\sqrt{2}}$」

よって $k \geqq \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ で，最小値は $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{4}}$ である．



◆別解◆ （2）**【微分する】**

数 III の微分法を知っていれば，解の配置に帰着する必要はない．

$t \geqq \sqrt{2}$ のもとで，$t + \frac{1}{2t}$ の値域を求める．

$g(t) = t + \frac{1}{2t}$ とおくと $t \geqq \sqrt{2}$ では

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{2t^2} = \frac{2t^2 - 1}{2t^2} > 0$$

となるから単調増加である．

これより最小値は $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{4}}$ である．