2 平面上で AB $=$ AC $= 1$ である二等辺三角形 ABC を考える．正の実数 r に対し，A，B，C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つを合わせた領域を D_r とする．ただし，この問いでは，三角形と円は周とその内部からなるものとする．辺 AB，AC，BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s，三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す．

（1） $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ．

（2） $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ．

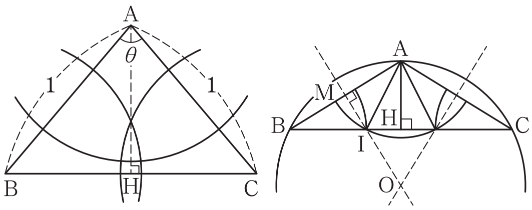
（3） $0 < \theta < \pi$ を満たす θ に対して，$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ のとき，s と t を θ を用いて表せ．（25　東大・文科）

2

数学Ⅰ【平面図形の雑題】**やや難**

《ギリギリを考える (C25) ☆》

▶解答◀ （1）（2）（3） A から BC に下ろした垂線の足を H，AB の中点を M，AC の中点を N とする．このとき，$\angle\mathrm{BAH} = \angle\mathrm{CAH} = \dfrac{\theta}{2}$ であることから，$\mathrm{BC} = 2\mathrm{BH} = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ である．



まず，s について考える．AH と BH の長さを考えると，$\mathrm{AH} = \cos\dfrac{\theta}{2}$, $\mathrm{BH} = \sin\dfrac{\theta}{2}$ であり，AH $\geqq$ BH を解くと

$$\cos\frac{\theta}{2} \geqq \sin\frac{\theta}{2} \qquad \therefore\ \ 0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

である．このとき，AB，AC，BC がすべて D_r に含まれるための必要十分条件は

$$\mathrm{M, N} \in D_r \text{かつ}\ \mathrm{H} \in D_r$$

$$1 \leqq 2r \text{ かつ } \mathrm{BC} \leqq 2r$$

$$r \geqq \max\left\{\frac{1}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．ここで，$\max\{a, b\}$ は a と b のうち小さくない方の値を表している．ここで，$0 < \dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{\pi}{4}$ に注意して $\dfrac{1}{2} \leqq \sin\dfrac{\theta}{2}$ を解くと，

$$\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \frac{\pi}{4} \qquad \therefore\ \ \frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

となることから，① より，

$\boldsymbol{0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}}$ のとき $s = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}}$ のとき $s = \boldsymbol{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

である．特に，（1）で，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき $s = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ となる．

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ のとき AH $\leqq$ BH である．線分 AB の垂直二等分線と BC の交点を I とすると，AI $=$ BI であり，I は必ず線分 BH 上にある（H より右に来ることはない）．このとき，$\triangle\mathrm{AMI} \equiv \triangle\mathrm{BMI}$ であり，

$$\angle\mathrm{ABI} = \angle\mathrm{BAI} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

であることから，

$$\mathrm{BI} = \frac{\mathrm{BM}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

となる．AB，AC，BC がすべて D_r に含まれるための必要十分条件は $\mathrm{I} \in D_r$ であるから，それは $r \geqq \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ となる．よって，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi}$ のとき $s = \boldsymbol{\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}}$ である．特に，（2）で $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$s = \dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ である．

次に，t について考える．$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心を O とし，外接円の半径を R とする．円周角の定理より $\angle\mathrm{BOC} = 2\angle\mathrm{BAC} = 2\theta$ であるから，O が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部または周に含まれる条件は

$$2\theta \leqq \pi \qquad \therefore\ \ 0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

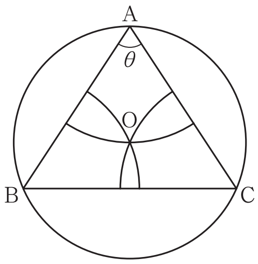
である．また，正弦定理より

$$2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin\theta} \qquad \therefore\ \ R = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta} = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

である．このとき，O は 3 頂点から等距離にあり，$\triangle\mathrm{ABC}$ がすべて D_r に含まれるための必要十分条件は $\mathrm{O} \in D_r$ である．よって，

$$r \geqq R \qquad \therefore\ \ r \geqq \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

となるから，$\boldsymbol{0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}}$ のとき $t = \boldsymbol{\dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}}$ である．特に，（1）で $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$t = \dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ である．



$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ のときは，外心 O は △ABC の内部にない．s のときと同様に考えると，△ABC がすべて D_r に含まれるための必要十分条件は $\mathrm{I} \in D_r$ であるから，それは $r \geqq \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$ となる．よって，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi}$ **のとき** $t =$ $\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}}$ である．特に，（2）で $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，

$$t = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$ である．