3 白玉 2 個が横に並んでいる．投げたとき表と裏のでる確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを用いて，次の手順($*$)をくり返し，白玉または黒玉を横一列に並べていく．

手順($*$)　コインを投げ，表がでたら白玉，裏がでたら黒玉を，それまでに並べられている一番右にある玉の右隣におく．そして，新しくおいた玉の色がその 1 つ左の玉の色と異なり，かつ 2 つ左の玉の色と一致するときには，新しくおいた玉の 1 つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる．

例えば，手順($*$)を 2 回行いコインが裏，表の順にでた場合には，白玉が 4 つ並ぶ．正の整数 n に対して，手順($*$)を n 回行った時点での $(n+2)$ 個の玉の並び方を考える．

（1） $n=3$ のとき，右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ．

（2） n を正の整数とする．右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ．

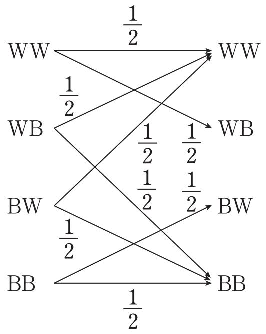
（3） n を正の整数とする．右から 1 番目と 2 番目の玉がともに白玉である確率を求めよ．　（25　東大・文科）

3

数学B【確率と漸化式】**標 準**

《文字をおいて考える (B25)》

▶解答◀　（1）（2）（3）　手順($*$)を n 回行って，右から 2 番目が白である確率を p_n とする．また，白玉を W，黒玉を B とかく．手順($*$)を n 回行って右から 2，1 番目が WW，WB，BW，BB となる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とすると，$p_n = a_n + b_n$ である．



このとき，図より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n) \quad \cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \cdots\cdots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}d_n \quad \cdots\cdots ③$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n + d_n) \quad \cdots\cdots ④$$

である．また，$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ も合わせると，①，④ は

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - d_n) \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n) \quad \cdots\cdots ⑥$$

となる．⑤ − ⑥ より

$$a_{n+1} - d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - d_n)$$

これより数列 $\{a_n - d_n\}$ が等比数列で，$a_0 = 1,\ d_0 = 0$ であるから

$$a_n - d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - d_0)$$

$$a_n - d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ⑦$$

また，⑤ + ⑥ より

$$a_{n+1} + d_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}(a_n + d_n)$$

$$a_{n+1} + d_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n + d_n - \frac{2}{3}\right)$$

これより数列 $\left\{a_n + d_n - \frac{2}{3}\right\}$ は等比数列で，

$$a_n + d_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_0 + d_0 - \frac{2}{3}\right)$$

$$a_n + d_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧ より

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

$$d_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となる．また，

$$p_n = a_n + b_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

である．（1）で $n=3$ のとき

$$p_3 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

注 意 **【場合分けして答える】**

（3）は偶奇に分けて答えてもよい．**n が奇数**のとき

$$a_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

であり，**n が偶数**のとき

$$a_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$