4 a を実数とする．座標平面において，次の連立不等式の表す領域の面積を $S(a)$ とする．

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+2 \\ y \geqq |x^2+a| \\ -1 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

a が $-2 \leqq a < 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ．（25　東大・文科）

4

数学II【面積】**標 準**

《面倒ではある (B20)》

▶解答◀ まず，$y=-(x^2+a)$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$ の大小を調べよう．$-2 \leqq a < 2$ においては

$$-\frac{1}{2}x^2+2-\{-(x^2+a)\}=\frac{x^2}{2}+a+2 \geqq 0$$

であるから，折り返した $y=-(x^2+a)$ が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$ より上側に来ることはない．

- $-2 \leqq a \leqq -1$ のとき：図 1 のようになる．

$-1 \leqq x \leqq 1$ においては常に $|x^2+a|=-(x^2+a)$ である．a が大きくなると $y=-(x^2+a)$ は下に下がるから，$S(a)$ は増加する．

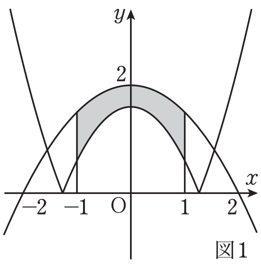

図1

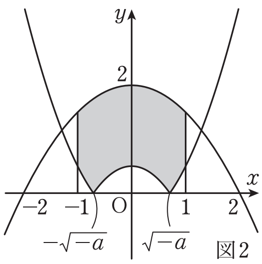

図2

- $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき：図 2 のようになる．

$$\frac{S(a)}{2}=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)dx$$

$$-\int_0^{\sqrt{-a}}\{-(x^2+a)\}\,dx-\int_{\sqrt{-a}}^1(x^2+a)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{6}+2x\right]_0^1-\left[-\frac{x^3}{3}-ax\right]_0^{\sqrt{-a}}$$

$$-\left[\frac{x^3}{3}+ax\right]_{\sqrt{-a}}^1$$

$$=\frac{11}{6}+2\left(\frac{-a\sqrt{-a}}{3}+a\sqrt{-a}\right)-\left(\frac{1}{3}+a\right)$$

$$=\frac{4}{3}a\sqrt{-a}-a+\frac{3}{2}$$

ここで，$t=\sqrt{-a}$ とおくと t のとりうる値の範囲は $0 \leqq t \leqq 1$ であり，$t^2=-a$ も合わせると

$$\frac{S(a)}{2}=-\frac{4}{3}t^3+t^2+\frac{3}{2}$$

$f(t)=-\dfrac{4}{3}t^3+t^2+\dfrac{3}{2}$ とおくと，

$$f'(t)=-4t^2+2t=2t(-2t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$		$-$
$f(t)$		↗		↘

これより，$-1 \leqq a \leqq 0$ における $S(a)$ の最大値は

$$2f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+3=\frac{19}{6}$$

である．

- $0 \leqq a < 2$ のとき：図 3 のようになる．$-1 \leqq x \leqq 1$ においては常に $|x^2+a|=x^2+a$ である．a が大きくなると $y=x^2+a$ は上に上がるから，$S(a)$ は減少する．

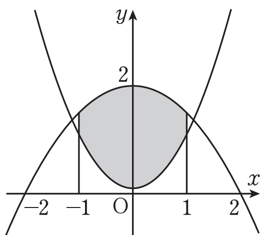

図3

よって，$S(a)$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{19}{6}}$ である．